

*SIGNAL*

*INFORMATION*

*COMMUNICATION*

TRAVAUX DIRIGES

ESIAL 1<sup>ère</sup> année

2007-2008

Marc Tomczak, Patrick Sibille

UHP, Nancy 1

**TD Matlab n°1**
**Exercice 1 : sinusoïde bruitée**

- Créer une sinusoïde d'amplitude  $A$ , de fréquence 100 Hz, échantillonnée à 500 Hz, de durée 2 secondes, dans un bruit blanc gaussien de puissance unitaire. On choisit  $A$  tel que le rapport signal à bruit (RSB) soit de 5dB. Tracer les 3 signaux (la sinusoïde, le bruit et la superposition des deux).
- Calculer l'énergie du signal non-bruité de 3 façons différentes (boucle `for`, `sum`, produit), comparer avec la puissance théorique multipliée par le nombre d'échantillons.
- Calculer la moyenne du signal bruité de 3 manières différentes.

**Exercice 2 : filtrage de signaux constants par morceaux**

Cet exercice fait suite aux exercices 10 et 11 du poly d'initiation à Matlab. Il s'agit de filtrer un signal du type succession d'échelons bruités.

- Créer à nouveau le signal bruité. On rappelle qu'il est supposé échantillonné à une fréquence de 100 Hz, pendant 12 secondes. On suppose qu'il est de moyenne nulle pendant les 4 premières secondes, puis de moyenne 10 lors des 2 secondes suivantes, de moyenne nulle lors des 3 secondes suivantes, puis de moyenne 15 pendant les 2 secondes suivantes, et enfin à nouveau de moyenne nulle pendant la dernière seconde. Le bruit qui se superpose à la mesure est supposé gaussien, d'écart type égal à 2.
- Étudier la commande `median` de Matlab. À quoi correspond-elle ? Sur le même modèle que l'algorithme de moyenne sur une fenêtre glissante, écrire un programme qui calcule la valeur médiane sur fenêtre glissante et le tester sur le signal bruité.
- Pour essayer d'améliorer la prise en compte des dynamiques rapides, on se propose de coupler l'algorithme de moyenne glissante avec un détecteur de saut. Celui-ci est très rudimentaire mais peut s'appliquer dans le cas d'un bruit de distribution quelconque. Il repose sur l'inégalité de Tchebychev :  $P(|X - m| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$  pour tout  $\lambda > 0$ . Ceci s'écrit aussi :  $P(|X - m| \geq \lambda \cdot \sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$ ,  $\sigma$  représentant bien sûr l'écart type du bruit. Écrire la fonction, la tester sur le signal en échelon et comparer avec les résultats précédents.

**Exercice 3 : autocorrélation d'un signal sinusoïdal**

- Créer un signal sinusoïdal  $x$  de fréquence 20 Hz, échantillonné à 100 Hz, s'étendant de  $t=0$  à  $t=10$ s.
- À l'aide de la commande `xcorr(..., 'unbiased')`, calculer et représenter sa fonction d'autocorrélation.
- Créer ensuite un bruit blanc gaussien  $b$  de durée équivalente. Modifier l'écart type du bruit de telle façon que sa puissance soit égale à 14 fois la puissance de la sinusoïde. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal obtenu par addition de  $x$  et  $b$ .
- Comparer les 2 fonctions d'autocorrélation en les représentant sur un même graphe. Conclusions ? Vérifier que la différence au rang zéro correspond bien à la puissance du bruit.

**TD Matlab n°2**
**Exercice 1 : développement en série de Fourier**

- a) Montrer que le développement en série de Fourier d'une onde carrée, d'amplitude 1 et de période  $2\pi$ , s'écrit :  $x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1}$ .
- b) Écrire une fonction qui permette de reconstruire l'onde carrée à partir de ce développement avec comme paramètres d'entrée le pas d'échantillonnage et le nombre d'harmoniques à prendre en compte. D'autres paramètres, comme les temps de début et de fin du signal, peuvent être ajoutés.
- c) En augmentant progressivement le nombre d'harmoniques et en ajustant le pas d'échantillonnage, vérifier l'apparition du phénomène de Gibbs (oscillations de fréquence croissante au niveau des discontinuités). Vérifier que le dépassement maximal tend vers 9% de l'amplitude de la discontinuité.
- d) On se limite à présent à une vingtaine d'harmoniques au maximum et à la demi période du signal comprise entre 0 et  $\pi$ . Modifier la fonction précédente de telle sorte que les approximations successives du signal soient stockées comme les lignes d'une seule matrice, puis représenter les différents résultats sur un seul et même graphe muni d'un titre. Enfin, effectuer une visualisation 3D du contenu de la matrice obtenue (commande `mesh`).

**Exercice 2 : convolution**

Soient les signaux numériques  $x(k)$  et  $y(k)$  définis par :

»  $x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$ ;  $y = [5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1]$ ;

On se propose de vérifier le théorème de convolution : il s'agit de montrer que le produit de convolution  $z(k) = x(k) * y(k)$  peut aussi s'obtenir par transformée de Fourier inverse du produit des transformées de Fourier  $X(f_k).Y(f_k)$ .

- a) Écrire un programme de calcul du produit de convolution  $z(k)$ . Comparer avec la commande Matlab :

```
» z = conv(x,y)
z =
    5    14    26    40    30    20    11    4
```

Commandes Matlab utiles : `length`, `zeros`

- b) Calculer les transformées  $X(f_k)$  et  $Y(f_k)$  en prenant en compte le fait que  $z(k)$  est de "longueur" 8 (c'est à dire que le vecteur  $z$  correspondant est de dimension 8), puis calculer le produit des transformées  $XY = X(f_k).Y(f_k)$ .

Commandes Matlab : `fft` (transformée de Fourier, rapide si le nombre d'échantillons du signal est une puissance de 2), "`*`" (multiplication élément par élément).

- c) Calculer la transformée de Fourier inverse  $z_2$  de  $XY$ . Comparer  $z$  et  $z_2$ , exprimer le vecteur  $z - z_2$  constitué des erreurs d'arrondi.

Commandes Matlab : `ifft`, `real`, `round`.

- d) Expliquer ce qui se passe si l'on reprend b) et c) en calculant les transformées uniquement sur cinq échantillons (ce qui correspond à la longueur maximale de  $x$  et  $y$ ).

**TD Matlab n°3**
**1 : Rappel et introduction**

La transformée de Fourier d'un signal à temps discret  $x(n)$  s'exprime par :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi n f} . \text{ Celle-ci est périodique, de période } 1.$$

Dans le cas d'un signal obtenu par échantillonnage à la période  $T_e$ , cette relation devient :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-j2\pi n T_e f} . \text{ La transformée de Fourier discrète (TFD) d'ordre } N$$

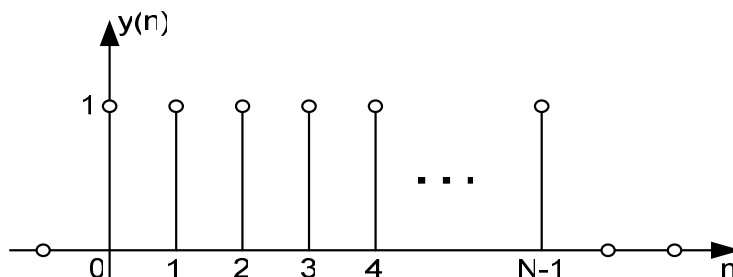
correspondante s'écrit quant à elle :  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi n T_e \frac{k}{N}}$  avec  $\begin{cases} 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 \leq k \leq N-1 \end{cases}$ .

a) Vérifier que sous Matlab, cette dernière expression devient :  $X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{-j2\pi(n-1)\frac{k-1}{N}}$

avec  $\begin{cases} 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq k \leq N \end{cases}$ .

b) En déduire les valeurs minimale et maximale des fréquences discrètes obtenues.

c) Soit le signal rectangulaire à temps discret  $y(n)$  suivant :



Montrer que sa transformée de Fourier est donnée par :  $Y(f) = e^{-j\pi f(N-1)} \frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f}$ . Cette forme est appelée *noyau de Dirichlet*, pour quelles valeurs de  $f$  s'annule-t-il ?

**2 : Analyse spectrale, cas d'une sinusoïde pure**

Soit la séquence d'instructions suivante :

```

> N=64; % nombre d'échantillons du signal
> Te=1/128; % fréquence d'échantillonnage = 128 Hz
> k=0:N-1;
> x=sin(2*pi*20*k*Te); % signal sinusoïdal
> plot(k,x)

```

a) Quelle est la fréquence de ce signal sinusoïdal ? Le théorème d'échantillonnage a-t-il été respecté ? Quel est a priori le contenu fréquentiel de ce signal ? (envisager d'abord le cas

théorique d'une sinusoïde pure continue et à support illimité, puis le cas d'une sinusoïde à temps continu et à support borné, et enfin considérer le cas discret).

- b) 

```
»X=fft(x);
»magX=abs(X);
»plot(k,magX),title('module de la TF'),xlabel('k'),grid
```

Expliquer le résultat obtenu. Essayer également en remplaçant la commande `plot` par la commande `stem`. Que vaut l'intervalle de fréquence entre 2 points consécutifs du spectre (résolution fréquentielle apparente) ? Vérifier la position des raies fréquentielles. Étudier et utiliser la commande `fftshift`. Quel est son intérêt ? Effectuer les modifications nécessaires pour n'afficher que les fréquences positives et pour graduer l'axe des fréquences en Hz. Pourquoi n'observe-t-on pas la forme caractéristique d'un sinus cardinal ?

- c) Refaire les manipulations précédentes avec une sinusoïde à 19 Hz. Expliquer à nouveau le résultat observé. Tenter de faire apparaître la forme sinus cardinal en jouant sur les différents paramètres (fréquence d'échantillonnage, nombre d'échantillons, etc.), conclusion ?
- d) Reprendre les questions b) et c) précédentes mais en prenant soin de compléter les signaux avec des valeurs nulles (commencer avec 64 zéros, puis essayer avec 448 zéros) avant de calculer la TFD (opération dite de "*zero padding*"). Conclusion ?
- e) Remarquer qu'un résultat similaire peut être obtenu sans modifier le signal de départ mais en spécifiant le nombre d'échantillons `nfft` sur lequel calculer la TFD (`fft(x,nfft)`), avec `nfft > N`. Quel est l'effet du *zero padding* sur la résolution fréquentielle apparente ?
- f) Dans ce qui précède, le fenêtrage appliqué implicitement au signal est de type rectangulaire. On a vu qu'en raison de ce fenêtrage apparaissaient dans le spectre des formes de type sinus cardinal (en fait, dans le cas discret, il s'agit plus exactement d'un *noyau de Dirichlet*). Quelles conséquences pratiques ce phénomène peut-il entraîner sur l'analyse spectrale de sinusoïdes ?
- g) On se propose maintenant d'étudier l'effet de l'utilisation de fenêtres temporelles autres que celle rectangulaire (par exemple `bartlett`, `blackman`, `kaiser` ou encore la fenêtre de Chebychev `chebwin`) sur l'analyse spectrale d'une sinusoïde. En principe, on devrait les tester en les multipliant par la sinusoïde avant de calculer la TFD du résultat. En fait, c'est inutile et on peut directement étudier les TFD de chaque fenêtre, puisque cette multiplication correspond dans le domaine fréquentiel à une convolution avec des impulsions.

Créer, et représenter sur un même graphe, les 4 fenêtres précédentes `f1`, `f2`, `f3` et `f4`, avec un nombre de points `N = 32`. On prendra comme paramètres additionnels 5 pour la fenêtre de Kaiser et 20 pour la fenêtre de Chebychev. Créer également une fenêtre rectangulaire (commande `boxcar` ou `rectwin`). Obtenir les spectres d'amplitude `F`, `F1`, `F2`, `F3` et `F4`, correspondant aux 5 fenêtres, entre les fréquences normalisées -0,5 et 0,5 (on pourra utiliser la commande `fftshift`). A l'aide de la commande `subplot`, représenter simultanément les 5 spectres.

Procéder de même que précédemment, mais en calculant les TFD sur 256 points (ce qui revient à rajouter 224 zéros). Pour mieux mettre en évidence la forme du spectre de chaque fenêtre, on peut utiliser une échelle logarithmique en ordonnée (commande `semilogy`). Quelles conclusions peut-on tirer ?

**TD Matlab n°4**
**Intercorrélation : exemple d'un sonar**

Un sonar actif émet un signal de fréquence donnée. Les réflexions ou les échos de ce signal sont ensuite reçus et analysés afin d'obtenir des informations sur la configuration de l'environnement du sonar. Au contraire, un sonar passif ne fait que collecter des signaux transmis par des capteurs et les analyse en fonction de leur contenu fréquentiel. Parmi les différents types de signaux utilisés par les sonars, on trouve bien sûr des impulsions sinusoïdales. Celles-ci sont de la forme suivante :

$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{d}} \cos(2\pi f_i t), & 0 \leq t \leq d, \\ 0, & t > d \end{cases},$$

où  $E$  représente l'énergie transmise en joules,  $d$  est la durée de l'impulsion en secondes, et  $f_i$  est la fréquence en Hertz de l'impulsion. Dans la pratique, la durée des impulsions peut varier d'une fraction de milliseconde à plusieurs secondes, et la gamme de fréquence s'étend de quelques centaines de Hz à plusieurs dizaines de kHz, en fonction du type de sonar et de son utilisation.

Le but de cet exercice est d'écrire un programme de simulation d'un sonar actif.

**a) Principe utilisé :**

Soit un sonar émettant un signal de courte durée  $u(t)$  qui, réfléchi par la cible, revient après une durée  $t_l$  proportionnelle à la distance entre la cible et l'émetteur. Le signal de retour  $x(t)$  est affaibli et bruité, mais on peut utiliser le maximum de la fonction d'intercorrélation pour estimer  $t_l$ . Soit  $x(t) = a.u(t - t_l)$ , montrer que  $\phi_{ux}(t)$  est maximal pour  $t = t_l$ .

**b) Cahier des charges :**

Le cahier des charges du programme est le suivant :

Une impulsion sonar doit être créée en fonction des paramètres définis par l'utilisateur. Pour plus de généralité, on créera une sinusoïde amortie exponentiellement (on adjoindra donc au modèle donné en introduction un terme de la forme  $\exp(-\alpha t)$  en facteur).

Les paramètres entrés par l'utilisateur sont : l'énergie  $E$ , la durée de l'impulsion  $d$ , la fréquence  $f_i$ , et le facteur d'amortissement  $\alpha$  (qu'on nommera `alpha` sous Matlab). On souhaite travailler en temps discret : la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  doit être choisie de telle manière qu'il y ait 10 échantillons par période  $T_i = 1/f_i$ . Le programme doit ensuite afficher l'amplitude (initiale)  $A = \sqrt{\frac{2E}{d}}$  de la sinusoïde, ainsi que la période d'échantillonnage  $T_e = 1/f_e$  et le nombre d'échantillons  $N$  constituant l'impulsion  $s(nT_e)$ .

Il s'agit ensuite de créer un signal de retour fictif, dénoté  $s_r(nT_e)$ . Celui-ci correspond à une version retardée, atténuée (divisée par un facteur) et affectée par un bruit blanc gaussien, du signal émis. Les paramètres entrés par l'utilisateur sont : le retard  $ret$  en secondes, le facteur d'atténuation  $att$  et le rapport signal sur bruit  $rsb$ , ce dernier étant calculé pour la sinusoïde de retour, supposée non-amortie (il s'agit donc en quelque sorte d'un RSB initial). Le retard est simulé par des valeurs nulles placées avant l'impulsion. Le bruit affecte le canal de réception en permanence et doit donc être présent sur toute la durée du signal.

Sachant que le RSB d'une sinusoïde d'amplitude  $a$  noyée dans un bruit blanc de puissance  $\sigma^2$  s'écrit  $10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)$ , vérifier que l'écart type du bruit doit être fixé selon :  $\sigma = \frac{Att}{\sqrt{2 \cdot 10^{\frac{rsb}{10}}}}$ , où

$$Att = A/att.$$

Le programme doit ensuite tracer sur un même graphe, gradué en secondes, le signal émis et le retour, atténué, bruité et retardé, ce qui suppose un réajustement de la taille du signal émis par ajout de valeurs nulles à la fin, puis il doit afficher le nombre d'échantillons  $M$  définitif de chacun des deux signaux.

Enfin, le programme doit estimer et afficher le retard (appelé  $retest$ ) entre l'émission et la réception en utilisant l'intercorrélacion entre ces deux signaux, représenter cette intercorrélacion et calculer la différence entre le retard fixé  $ret$  et le retard estimé  $retest$ . Deux approches différentes doivent être utilisées, d'une part le calcul direct à l'aide de la commande `xcorr`, et d'autre part, le calcul dans le domaine fréquentiel. Dans le second cas, on prendra soin de compléter les signaux avec un nombre suffisant de zéros lors du calcul de la transformée de Fourier discrète (voir exercice sur la convolution), afin d'éviter les problèmes de convolution circulaire.

**Remarque :** le résultat de l'intercorrélacion entre le signal émis et le signal de retour est de longueur  $2M-1$ . Mais seuls  $M$  échantillons parmi ceux-ci sont pertinents pour l'analyse, ce sont ceux qui correspondent aux décalages du signal de retour depuis sa position d'origine et dans le sens rétrograde. On prendra donc soin de sélectionner ces  $M$  échantillons afin de pouvoir grader l'intercorrélacion selon le même temps que celui utilisé pour les deux signaux.

**Rappel :** dans le cas réel, on a  $\phi_{xy}(n) = x(-n) * y(n) \xrightarrow{TF} \Phi_{xy}(f) = F[x(-n)]Y(f)$ .

En plus des commandes Matlab déjà rencontrées, on pourra avoir l'usage de : `input`, `fprintf`, `find`, `fliplr` (ou `flipud`), `nextpow2`, `max`, etc.

### c) Préfiltrage :

Pour améliorer les résultats obtenus, on peut tenter de filtrer le signal de retour avant le calcul de l'intercorrélacion afin de limiter l'influence du bruit. Une possibilité consiste à utiliser un filtre du 2<sup>ème</sup> ordre avec résonance à la fréquence du signal émis. Le filtrage induisant toujours un retard, il est indispensable de filtrer le signal dans le sens chronologique

puis de le filtrer à nouveau dans le sens rétrograde (ce qui est réalisé automatiquement avec la commande Matlab `filtfilt`).

On rappelle la forme standard d'un filtre continu du 2<sup>ème</sup> ordre :  $\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$ .

Pour qu'il y ait résonance, il faut fixer  $\zeta$  (noté `dzeta`) à une valeur suffisamment faible, par exemple 0,05. Montrer que dans ce cas,  $\omega_0$  (noté `omega0`) est donné par :  $\omega_0 = \frac{2\pi f_i}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}$  et

tracer le diagramme de Bode correspondant à l'aide des commandes `tf` et `bode`. Calculer le gain  $m$  du filtre à la fréquence de résonance.

Pour obtenir une version discrétisée du filtre, utilisable sous Matlab, on choisit la méthode de Tustin avec précompensation de distorsion (*prewarping*), qui consiste à poser :  $s = \lambda \frac{z-1}{T_e} \frac{z+1}{z+1}$

où le facteur d'échelle  $\lambda$  est donné par  $\lambda = \frac{T_e}{2} \frac{\omega_1}{\tan\left(\frac{\omega_1 T_e}{2}\right)}$  et où  $\omega_1$  désigne la pulsation à

privilégier lors de la discrétisation.

Si l'on pose  $\omega_1 = 2\pi f_i$ , en déduire que cela revient à remplacer  $s$  par  $\frac{2\pi f_i}{\tan(\pi f_i T_e)} \frac{z-1}{z+1}$  et que la

fonction de transfert du filtre discret équivalent s'écrit finalement :

$$\frac{\omega_0^2 (z^2 + 2z + 1)}{(a^2 + 2\zeta\omega_0 a + \omega_0^2)z^2 + 2(\omega_0^2 - a^2)z + a^2 + \omega_0^2 - 2\zeta\omega_0 a} \text{ avec } a = \frac{2\pi f_i}{\tan(\pi f_i T_e)}.$$

Tracer le diagramme de Bode du filtre discret (commande `dbode`) et le comparer à celui du filtre continu.

Appliquer le filtre au signal de retour puis diviser le signal résultant par le carré du gain  $m$  avant de calculer l'intercorrélation, puis comparer avec les résultats précédents.

#### **d) Autres signaux d'émission :**

Sur un plan théorique, on peut montrer que l'estimation de retard par intercorrélation est non biaisée et de variance proportionnelle à  $\frac{1}{4\pi^2 \nu_x^2 \text{rsb}}$  où  $\nu_x^2$  désigne "l'épanouissement

fréquentiel" du signal émis. Cette quantité, qui est une mesure du carré de la largeur de bande du signal, et le RSB sont donc à maximiser pour avoir une variance d'estimation la plus faible possible. Dans le cas de signaux sinusoïdaux, on a donc intérêt à maximiser l'amplitude et la fréquence et à minimiser la durée de l'impulsion. Toutefois, les signaux sinusoïdaux présentent un inconvénient : leur fonction d'autocorrélation étant périodique, il peut y avoir ambiguïté sur la mesure, connue à une période près.

Pour éviter ce genre d'ambiguïté, on a intérêt à utiliser des signaux dont la fonction d'autocorrélation est concentrée en zéro. C'est le cas des signaux modulés linéairement en fréquence, de la forme :  $s_m(t) = A \cos\left(\frac{f_i}{2d} t^2\right)$ .

Comparer les résultats obtenus pour ce type de signal avec les résultats précédents.



**TD : Transformées et Systèmes**
**Exercice 1 : modulation d'amplitude**

Soit un système de modulation d'amplitude dont la réponse au signal d'entrée  $x(t)$  est le signal  $z(t) = x(t).y(t)$ .

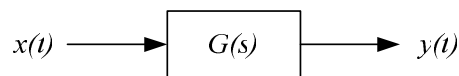
- Montrer que si  $y(t) = e^{j\omega_m t}$ , la transformée de Fourier  $Z(\omega)$  de  $z(t)$  est donnée par  $X(\omega - \omega_m)$ , où  $X(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $x(t)$ .
- Montrer que la démodulation peut alors être obtenue par multiplication par  $e^{-j\omega_m t}$ .
- On module à présent  $x(t)$  par  $y(t) = \cos(\omega_m t)$ . Montrer que la démodulation peut être réalisée par un multiplieur par  $\cos(\omega_m t)$  suivi d'un filtre passe-bas.

**Exercice 2 : réponse impulsionnelle et corrélation**

Soit un système linéaire utilisé pour filtrer un signal  $x(t)$  donné. On suppose que la réponse impulsionnelle du filtre est  $g(t) = x(t_0 - t)$ ,  $t_0$  étant une constante. Exprimer la réponse  $y(t)$  du filtre à  $x(t)$ . Expliquer l'utilité d'un tel filtre.

**Exercice 3 : corrélations entrée/sortie d'un SIL**

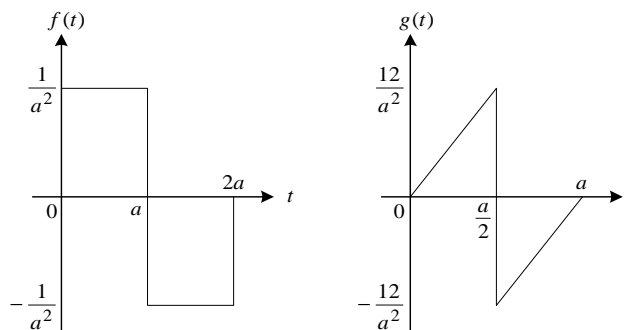
On considère le système continu invariant linéaire suivant, de réponse impulsionnelle  $g(t)$  :



- Exprimer la fonction d'intercorrélation  $r_{xy}(\tau)$  sous forme d'un produit de convolution. De même, exprimer la sortie  $y(t)$  comme un produit de convolution. En déduire la relation suivante :  $r_{xy}(\tau) = r_x(\tau) * g(\tau)$ , où  $r_x(\tau)$  désigne la fonction d'autocorrélation (FA) de  $x(t)$ .
- De façon similaire, exprimer la FA de la sortie  $r_y(\tau)$  en fonction des FAs de l'entrée et de la réponse impulsionnelle.

**Exercice 4 : transformées de Laplace de signaux simples**

Déterminer les transformées de Laplace  $F(s)$  et  $G(s)$  des signaux  $f(t)$  et  $g(t)$  représentés ci-dessous.


**Exercice 5 : système d'équations différentielles**

Résoudre le système d'équations différentielles suivant pour  $t \geq 0$ , à l'aide de la transformation de Laplace :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) - 3y_1(t) + e^{-t} \\ \dot{y}_2(t) + 2y_2(t) = 0 \end{cases} \text{ avec } y_1(0) = 0 \text{ et } y_2(0) = 1.$$

### Exercice 6 : réponse d'un système invariant linéaire

Soit un système invariant linéaire de réponse impulsionnelle  $g(t) = e^{-2t} \cdot 1(t)$ , soumis à une entrée  $x(t) = e^{-t} \cdot 1(t)$ .

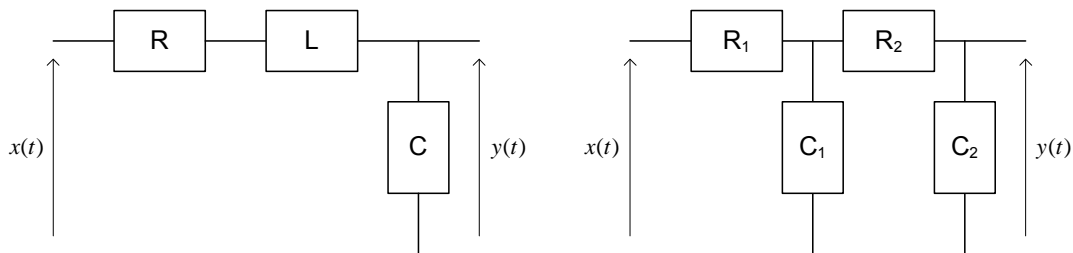
- Déterminer les transformées de Laplace de  $x(t)$  et  $g(t)$ .
- Quelle est la transformée de Laplace  $Y(s)$  de la sortie  $y(t)$  du système ?
- En déduire  $y(t)$ .
- Vérifier ce résultat en effectuant le produit de convolution  $x(t) * g(t)$ .

### Exercice 7 : modèles mathématiques d'un S.I.L.

Soit un système régi par l'équation différentielle :  $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2x(t)$ . Déterminer ses autres modèles mathématiques : fonction de transfert  $G(s)$ , pôles et zéros, réponse impulsionnelle  $g(t)$ . De quel type précis de système s'agit-il ?

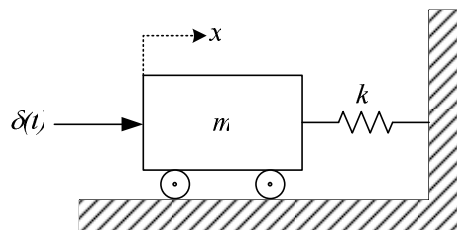
### Exercice 8 : réseaux RLC

Établir les fonctions de transfert  $\frac{Y(s)}{X(s)}$  des circuits suivants. Le second circuit, constitué de deux réseaux RC, est-il équivalent à la mise en cascade de deux réseaux RC ?



### Exercice 9 : système mécanique

On considère le système mécanique représenté ci-après. Celui-ci, initialement au repos, est mis en mouvement par une impulsion. Expliciter l'oscillation résultante (on néglige les frottements).



### Exercice 10 : système du premier ordre (thermomètre)

Soumis à un échelon de température, un thermomètre atteint 98% de sa valeur finale en une minute. Si l'on suppose que le thermomètre est un système du premier ordre, que vaut sa constante de temps  $T$  ?

### Exercice 11 : caractéristiques d'un système du deuxième ordre

Soit le système de fonction de transfert  $G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$ .

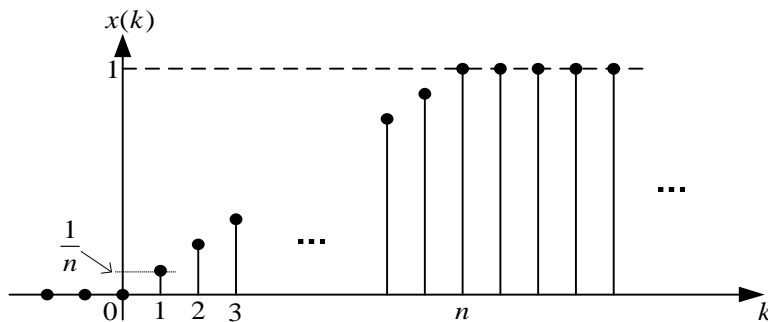
- Déterminer successivement son gain statique, sa pulsation propre et son coefficient d'amortissement. De quel type précis de système s'agit-il ?
- Le système étant soumis à une entrée en échelon, donner son taux de premier dépassement, son temps de dépassement maximal et son temps de réponse à 5%.
- Quelle est sa pulsation de résonance ? Que vaut sa pulsation de coupure ?

**Exercice 12 : détermination de la fonction de transfert d'un système du deuxième ordre**

Quelle est la transmittance du système du deuxième ordre qui présente un gain en régime permanent de 20 dB, un facteur de qualité de 8 dB et une bande passante de 50 Hz ?

**Exercice 13 : transformée en z d'un signal à temps discret**

Que vaut la transformée en z du signal à temps discret suivant ?



**Exercice 14 : transformée en z inverse**

Déterminer l'original  $x(kT_e)$  de  $X(z) = \frac{z^2 + 6z}{(z^2 - 2z + 2)(z - 1)}$ .

**Exercice 15 : réponses d'un système discret (1)**

Calculer et représenter la réponse impulsionnelle  $g(k)$  et la réponse indicielle  $h(k)$ , pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , du système de transmittance  $G(z) = \frac{0,2z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}}$ .

**Exercice 16 : réponses d'un système discret (2)**

- Soit le système de fonction de transfert  $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,8253z^2 + 0,3494z - 0,1747}{z^3}$ .  
Déterminer sa réponse impulsionnelle  $g(k)$ . Obtenir la réponse indicielle  $h(k)$  du système à partir du produit de convolution discret entre le signal d'entrée et  $g(k)$ .
- Mêmes questions pour le système régi par l'équation aux différences finies :  $y_k - ay_{k-1} = x_k$  avec  $-1 < a < 1$  et  $y_{-1} = 0$ .

**Exercice 17 : théorème d'échantillonnage**

Un signal  $x(t)$ , dont la densité spectrale de puissance  $\Phi_x(f)$  est représentée sur la figure suivante (a), est échantillonné à une cadence  $f_e$  (on suppose un échantillonnage idéal de Dirac). Le signal échantillonné possède la densité spectrale  $\Phi'_x(f)$  représentée sur la figure (b). Déterminer la fréquence d'échantillonnage utilisée et indiquer si ce choix est judicieux pour permettre une reconstitution du signal par filtrage idéal.

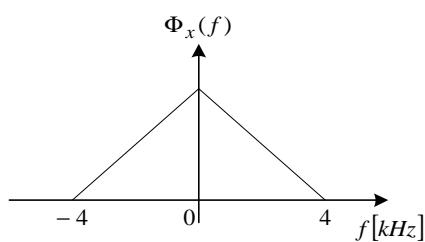


Figure (a)

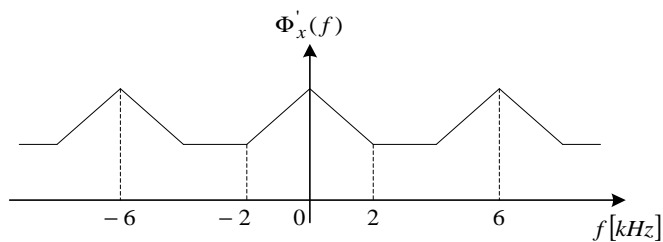


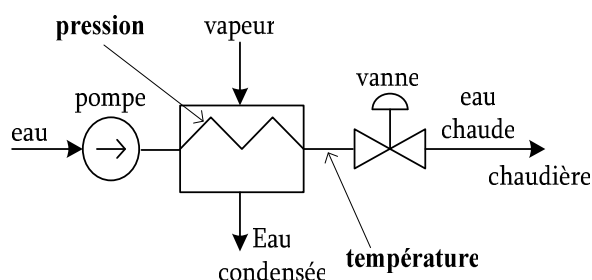
Figure (b)

### Exercice 18 : échantillonnage d'un signal sinusoïdal

Le signal continu  $f(t) = a_1 \sin(2\pi t) + a_2 \sin(20t)$  est échantillonné avec une période  $T_e = 0,2$  s. Quelles sont les fréquences en sortie de l'échantillonneur ?

### Exercice 19 : repliement de fréquence

Le système suivant permet d'alimenter la chaudière d'un navire en eau chaude :



Du fait du vieillissement de l'installation, un jeu apparaît dans le positionnement de la vanne de commande du débit d'eau chaude, ce qui se traduit par un phénomène d'oscillation des variables du système. Les tracés de la température et de la pression, qui sont ramenés en salle de commande, mettent en évidence une oscillation.

Ces grandeurs étant physiquement couplées devraient osciller à la même fréquence, or on mesure une période d'oscillation de 2,11 minutes pour la pression et de 38 minutes pour la température. Comment expliquer cette contradiction, sachant que, si la pression est recueillie en continu, la température est échantillonnée toutes les 2 minutes ? À partir de quelle période d'échantillonnage verrait-on le paradoxe s'évanouir ?

### Exercice 20 : transformée de Fourier d'un signal à temps discret et TFD

Soit le signal à temps discret :  $x(n) = a^n \cdot 1(n)$ ,  $0 < a < 1$ .

- Calculer la transformée de Fourier (TF)  $X(\omega)$  de  $x(n)$ .
- Le spectre est alors discrétisé aux  $N$  fréquences équidistantes :  $\omega_k = 2\pi k / N$  avec  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .
  - Donner l'expression de  $X(\omega_k)$ .
  - Comparer  $X(\omega_k)$  avec  $X(k)$ , la transformée de Fourier discrète (TFD) d'ordre  $N$  du signal  $x(n)$ .
  - Quelle est la relation entre le signal discret temporel  $\hat{x}(n)$ , correspondant à la transformée inverse des échantillons  $X(\omega_k)$ , et le signal  $x(n)$  ?
  - Montrer que sur l'intervalle  $0 \leq n \leq N - 1$ , le signal  $\hat{x}(n)$  est donné par :  $\hat{x}(n) = \frac{a^n}{1 - a^n}$ .

Comment minimiser l'erreur commise par rapport au signal d'origine ?

- On considère le signal  $x_N(n)$  obtenu par troncature de  $\hat{x}(n)$  :  $x_N(n) = \begin{cases} \hat{x}(n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ 
  - Calculer la TF  $X_N(\omega)$  du signal  $x_N(n)$ .
  - Vérifier que  $X_N(\omega)$  et  $X(\omega)$  sont identiques aux fréquences discrètes  $\omega_k$ .

**TRANSFORMEES DE LAPLACE USUELLES**

x(t)	X(s)	x(t)	X(s)
$\delta(t)$	1	$\left(1 - \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{b-a}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$
$\delta(t-T)$	$e^{-sT}$	$(e^{-at} - e^{-bt}(1-(a-b)t)) \cdot 1(t)$	$\frac{(a-b)^2}{(s+a)(s+b)^2}$
1(t)	$\frac{1}{s}$	$(a-b(a-b)te^{-bt} - ae^{-at}) \cdot 1(t)$	$\frac{(a-b)^2 s}{(s+a)(s+b)^2}$
t.1(t)	$\frac{1}{s^2}$	$((c-b)e^{-at} + (a-c)e^{-bt} + (b-a)e^{-ct}) \cdot 1(t)$	$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\frac{1}{2!}t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^3}$	$(a(b-c)e^{-at} + b(c-a)e^{-bt} + c(a-b)e^{-ct}) \cdot 1(t)$	$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\frac{1}{3!}t^3 \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^4}$	$\sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{sh}(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
t.e^{-at}.1(t)	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{ch}(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\frac{1}{2}t^2 \cdot e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \cdot e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$(1 - e^{-at}) \cdot 1(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$e^{-at} \left( \cos(\omega t) - \frac{a}{\omega} \sin(\omega t) \right) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at}) \cdot 1(t)$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$(\text{ch}(\omega t) - 1) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 - \omega^2)}$
$\frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2}(at)^2 - at + 1 - e^{-at} \right) \cdot 1(t)$	$\frac{a}{s^3(s+a)}$	$(1 - \cos(\omega t)) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
$(1 - at)e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$2e^{-at}(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) \cdot 1(t)$ $= 1(t) \cdot \dots$	$\frac{\alpha + j\beta}{s + (a + j\omega)} + \frac{\alpha - j\beta}{s + (a - j\omega)}$
$t \left( 1 - \frac{at}{2} \right) e^{-at} \cdot 1(t)$	$\frac{s}{(s+a)^3}$	$2e^{-at} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \left( \omega t + \text{Arctg} \frac{\alpha}{\beta} \right)$	$= 2 \frac{\alpha(s+a) + \beta\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$(1 - e^{-at}(1 + at)) \cdot 1(t)$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\left( e^{-at} + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \right) \cdot 1(t)$	$\frac{a^2 + \omega^2}{(s+a)(s^2 + \omega^2)}$
$(b - be^{-at} + a(a-b)te^{-at}) \cdot 1(t)$	$\frac{a^2(s+b)}{s(s+a)^2}$	$\left( 1 - e^{-at} \left( \cos(\omega t) + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right) \cdot 1(t)$	$\frac{a^2 + \omega^2}{s((s+a)^2 + \omega^2)}$
$(e^{-at} - e^{-bt}) \cdot 1(t)$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$(\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) \cdot 1(t)$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$(be^{-bt} - ae^{-at}) \cdot 1(t)$	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	t.sin(ωt).1(t)	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

x(t)	X(s)	x(t)	X(s)
$\dot{\delta}(t)$	s	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t).1(t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
$\delta^{(n)}(t)$	$s^n$	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi).1(t)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
$a^{\frac{t}{T}}.1(t)$	$\frac{1}{s - \frac{1}{T} \ln(a)}$	$\phi = \text{Arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$	<i>Cette table vous est offerte par : Marc Tomczak © v2.1</i>
$\sin(\omega t + \theta).1(t)$	$\frac{s \cdot \sin \theta + \omega \cdot \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$	$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)\right).1(t)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
$(\cos(at) - \cos(bt)).1(t)$ (avec $a \neq b$ )	$\frac{(b^2 - a^2)s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{\omega}\right)^2} \cos\left(\omega t - \text{Arctg}\frac{b}{a}\right).1(t)$	$\frac{as + b}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.1(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$e^{\frac{\omega t}{2}} \left( \sqrt{3} \sin\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) + e^{-\frac{3\omega t}{2}} \right).1(t)$	$\frac{3\omega^2}{s^3 + \omega^3}$
$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}.1(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^3}}$	$e^{\frac{\omega t}{2}} \left( \sqrt{3} \sin\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) - e^{-\frac{3\omega t}{2}} \right).1(t)$	$\frac{3\omega s}{s^3 + \omega^3}$
$(\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t)).1(t)$	$\frac{2\omega s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\left(2e^{\frac{\omega t}{2}} \cos\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) + e^{-\omega t}\right).1(t)$	$\frac{3s^2}{s^3 + \omega^3}$
$\left(\cos(\omega t) - \frac{\omega t \sin(\omega t)}{2}\right).1(t)$	$\frac{s^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$-e^{-\frac{\omega t}{2}} \left( \sqrt{3} \sin\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) - e^{\frac{3\omega t}{2}} \right).1(t)$	$\frac{3\omega^2}{s^3 - \omega^3}$
$(\omega t - \sin(\omega t)).1(t)$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$e^{\frac{\omega t}{2}} \left( \sqrt{3} \sin\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) + e^{\frac{3\omega t}{2}} \right).1(t)$	$\frac{3\omega s}{s^3 - \omega^3}$
$-(\text{sh}(\omega t) - \omega t \cdot \text{ch}(\omega t)).1(t)$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 - \omega^2)^2}$	$\left(2e^{-\frac{\omega t}{2}} \cos\left(\frac{\omega t \sqrt{3}}{2}\right) + e^{\omega t}\right).1(t)$	$\frac{3s^2}{s^3 - \omega^3}$
$(t \cdot \text{sh}(\omega t)).1(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}$	$(\sin(\omega t) \text{ch}(\omega t) - \cos(\omega t) \text{sh}(\omega t)).1(t)$	$\frac{4\omega^3}{s^4 + 4\omega^4}$
$(\text{sh}(\omega t) + \omega t \cdot \text{ch}(\omega t)).1(t)$	$\frac{2\omega s^2}{(s^2 - \omega^2)^2}$	$\sin(\omega t) \text{sh}(\omega t).1(t)$	$\frac{2\omega^2 s}{s^4 + 4\omega^4}$
$\left(\text{ch}(\omega t) + \frac{\omega t \cdot \text{sh}(\omega t)}{2}\right).1(t)$	$\frac{s^3}{(s^2 - \omega^2)^2}$	$(\sin(\omega t) \text{ch}(\omega t) + \cos(\omega t) \text{sh}(\omega t)).1(t)$	$\frac{2\omega s^2}{s^4 + 4\omega^4}$
$(\text{ch}(\omega t) - 1).1(t)$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 - \omega^2)}$	$\cos(\omega t) \text{ch}(\omega t).1(t)$	$\frac{s^3}{s^4 + 4\omega^4}$
$(\text{sh}(\omega t) - \omega t).1(t)$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 - \omega^2)}$	$(\text{sh}(\omega t) - \sin(\omega t)).1(t)$	$\frac{2\omega^3}{s^4 - \omega^4}$
$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t\sqrt{\pi t^3}}.1(t)$	$\frac{2(b-a)}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$	$(\text{ch}(\omega t) - \cos(\omega t)).1(t)$	$\frac{2\omega^2 s}{s^4 - \omega^4}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{2t\sqrt{\pi t^3}}.1(t)$	$\sqrt{s-a} + \sqrt{s-b}$	$(\text{sh}(\omega t) + \sin(\omega t)).1(t)$	$\frac{2\omega s^2}{s^4 - \omega^4}$
$\cos(2\sqrt{kt}).(\pi t)^{-\frac{1}{2}}.1(t)$	$s^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k}{s}}$	$(\text{ch}(\omega t) + \cos(\omega t)).1(t)$	$\frac{2s^3}{s^4 - \omega^4}$

n°	X(s)	x(kT <sub>e</sub> )	X(z)
1	1	δ(kT <sub>e</sub> ) = δ(k)	z <sup>-0</sup> = 1
2	e <sup>-nT<sub>e</sub>s</sup>	δ(k-n)	z <sup>-n</sup>
3	$\frac{1}{s}$	1(kT <sub>e</sub> ) = 1(k)	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kT <sub>e</sub> .1(k)	$\frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT_e)^2 . 1(k)$	$\frac{T_e^2}{2} \cdot \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} = \frac{T_e^2}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kT_e)^3 . 1(k)$	$\frac{T_e^3}{6} \left[ \frac{3z^{-2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^4} + \frac{z^{-1}(1+2z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} \right]$
7	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}(kT_e)^{n-1} . 1(k)$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[ \frac{1}{1-e^{-aT_e}z^{-1}} \right]$
8	$\frac{1}{s - \frac{1}{T} \ln(a)}$	a <sup>k</sup> .1(k)	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$
9	$\frac{1}{s+a}$	e <sup>-akT<sub>e</sub></sup> .1(k)	$\frac{1}{1-e^{-aT_e}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
10	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kT <sub>e</sub> .e <sup>-akT<sub>e</sub></sup> .1(k)	$\frac{T_e e^{-aT_e} z^{-1}}{(1-e^{-aT_e}z^{-1})^2} = \frac{T_e e^{-aT_e} z}{(z-e^{-aT_e})^2}$
11	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT_e)^2 . e^{-akT_e} . 1(k)$	$\frac{T_e^2}{2} \cdot \frac{e^{-aT_e} z^{-1}(1+e^{-aT_e}z^{-1})}{(1-e^{-aT_e}z^{-1})^3} = \frac{T_e^2}{2} \cdot \frac{e^{-aT_e} (z+e^{-aT_e}) z}{(z-e^{-aT_e})^3}$
12	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}(kT_e)^{n-1} . e^{-akT_e} . 1(k)$	$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[ \frac{1}{1-e^{-aT_e}z^{-1}} \right]$
13	$\frac{a}{s(s+a)}$	(1-e <sup>-akT<sub>e</sub></sup> ).1(k)	$\frac{(1-e^{-aT_e})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT_e}z^{-1})} = \frac{(1-e^{-aT_e})z}{(z-1)(z-e^{-aT_e})}$
14	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(akT_e - 1 + e^{-akT_e}) . 1(k)$	$\frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{(1-e^{-aT_e})z^{-1}}{a(1-z^{-1})(1-e^{-aT_e}z^{-1})}$
15	$\frac{a}{s^3(s+a)}$	$\frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2}(akT_e)^2 - akT_e + 1 - e^{-akT_e} \right) . 1(k)$	$\frac{T_e^2}{2} \cdot \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} - \frac{T_e}{a} \cdot \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{(1-e^{-aT_e})z^{-1}}{a^2(1-z^{-1})(1-e^{-aT_e}z^{-1})}$
16	$\frac{s}{(s+a)^2}$	(1-akT <sub>e</sub> )e <sup>-akT<sub>e</sub></sup> .1(k)	$\frac{1-e^{-aT_e}(1+aT_e)z^{-1}}{(1-e^{-aT_e}z^{-1})^2} = \frac{[z-e^{-aT_e}(1+aT_e)]z}{(z-e^{-aT_e})^2}$
17	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	(1-(1+akT <sub>e</sub> )e <sup>-akT<sub>e</sub></sup> ).1(k)	$\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1-(1+aT_e)e^{-aT_e}z^{-1}}{(1-e^{-aT_e}z^{-1})^2}$
18	$\frac{a^2(s+b)}{s(s+a)^2}$	(b-be <sup>-akT<sub>e</sub></sup> + a(a-b)kT <sub>e</sub> .e <sup>-akT<sub>e</sub></sup> ).1(k)	$\frac{b}{1-z^{-1}} - \frac{b}{1-e^{-aT_e}z^{-1}} + \frac{a(a-b)T_e e^{-aT_e}z^{-1}}{(1-e^{-aT_e}z^{-1})^2}$
19	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	(e <sup>-akT<sub>e</sub></sup> - e <sup>-bkT<sub>e</sub></sup> ).1(k)	$\frac{(e^{-aT_e} - e^{-bT_e})z^{-1}}{(1-e^{-aT_e}z^{-1})(1-e^{-bT_e}z^{-1})} = \frac{(e^{-aT_e} - e^{-bT_e})z}{(z-e^{-aT_e})(z-e^{-bT_e})}$
20	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	(be <sup>-bkT<sub>e</sub></sup> - ae <sup>-akT<sub>e</sub></sup> ).1(k)	$\frac{(b-a) - (be^{-aT_e} - ae^{-bT_e})z^{-1}}{(1-e^{-aT_e}z^{-1})(1-e^{-bT_e}z^{-1})}$
21	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$\left( 1 - \frac{be^{-akT_e} - ae^{-bkT_e}}{b-a} \right) . 1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{(b-a) - (be^{-bT_e} - ae^{-aT_e})z^{-1}}{(b-a)(1-e^{-aT_e}z^{-1})(1-e^{-bT_e}z^{-1})}$
22	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	sin(ωkT <sub>e</sub> ).1(k)	$\frac{\sin(\omega T_e)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T_e)z^{-1}+z^{-2}} = \frac{\sin(\omega T_e)z}{z^2-2z\cos(\omega T_e)+1}$
23	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	cos(ωkT <sub>e</sub> ).1(k)	$\frac{1-\cos(\omega T_e)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T_e)z^{-1}+z^{-2}} = \frac{[z-\cos(\omega T_e)]z}{z^2-2z\cos(\omega T_e)+1}$

24	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\text{sh}(\omega k T_e) \cdot 1(k)$	$\frac{\text{sh}(\omega T_e) z^{-1}}{1 - 2\text{ch}(\omega T_e) z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\text{sh}(\omega T_e) z}{z^2 - 2z\text{ch}(\omega T_e) + 1}$
25	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\text{ch}(\omega k T_e) \cdot 1(k)$	$\frac{1 - \text{ch}(\omega T_e) z^{-1}}{1 - 2\text{ch}(\omega T_e) z^{-1} + z^{-2}} = \frac{[z - \text{ch}(\omega T_e)]z}{z^2 - 2z\text{ch}(\omega T_e) + 1}$
26	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-akT_e} \sin(\omega k T_e) \cdot 1(k)$	$\frac{e^{-aT_e} \sin(\omega T_e) z^{-1}}{1 - 2e^{-aT_e} \cos(\omega T_e) z^{-1} + e^{-2aT_e} z^{-2}}$
27	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-akT_e} \cos(\omega k T_e) \cdot 1(k)$	$\frac{1 - e^{-aT_e} \cos(\omega T_e) z^{-1}}{1 - 2e^{-aT_e} \cos(\omega T_e) z^{-1} + e^{-2aT_e} z^{-2}}$
28	$\frac{\omega^2}{s(s^2 - \omega^2)}$	$(\text{ch}(\omega k T_e) - 1) \cdot 1(k)$	$\frac{1 - \text{ch}(\omega T_e) z^{-1}}{1 - 2\text{ch}(\omega T_e) z^{-1} + z^{-2}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}$
29	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$	$(1 - \cos(\omega k T_e)) \cdot 1(k)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - \cos(\omega T_e) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega T_e) z^{-1} + z^{-2}}$
30	$\frac{a^2 + \omega^2}{s((s+a)^2 + \omega^2)}$	$\left(1 - e^{-akT_e} \left(\cos \omega k T_e + \frac{a}{\omega} \sin \omega k T_e\right)\right) \cdot 1(k)$	$\frac{(A + Bz^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 2e^{-aT_e} \cos(\omega T_e) z^{-1} + e^{-2aT_e} z^{-2})}$
<i>M. Tomczak</i> <sup>©</sup> v 1.2		$A = 1 - e^{-aT_e} \cos \omega T_e - \frac{a}{\omega} e^{-aT_e} \sin \omega T_e$	$B = e^{-2aT_e} + \frac{a}{\omega} e^{-aT_e} \sin \omega T_e - e^{-aT_e} \cos \omega T_e$
<b>G(z)</b>		$G_0(z) = Z[B_0(s)G(s)] = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n}$	
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{T_e}{z-1}$	2 $\frac{1}{s^2}$ $\frac{T_e^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{z-1}{z} \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left( \frac{z}{z - e^{-aT_e}} \right) \right]$	4 $\frac{a}{s+a}$ $\frac{1 - e^{-aT_e}}{z - e^{-aT_e}}$
5	$\frac{a}{s(s+a)}$	$b_1 = \frac{1}{a}(aT_e - 1 + e^{-aT_e})$ ; $b_2 = \frac{1}{a}(1 - e^{-aT_e} - aT_e e^{-aT_e})$ ; $a_1 = -(1 + e^{-aT_e})$ ; $a_2 = e^{-aT_e}$	
6	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$b_1 = \frac{1-a}{a^2} + T_e \left( \frac{T_e}{2} - \frac{1}{a} \right)$ ; $b_2 = (1 - e^{-aT_e}) \left( \frac{T_e^2}{2} - \frac{2}{a^2} \right) + \frac{T_e}{a} (1 + e^{-aT_e})$ $b_3 = - \left( \frac{1}{a^2} (e^{-aT_e} - 1) + e^{-aT_e} T_e \left( \frac{T_e}{2} + \frac{1}{a} \right) \right)$ ; $a_1 = -(2 + e^{-aT_e})$ ; $a_2 = 2e^{-aT_e} + 1$ ; $a_3 = -e^{-aT_e}$	
7	$\frac{a^2}{(s+a)^2}$	$b_1 = 1 - e^{-aT_e} (1 + aT_e)$ ; $b_2 = e^{-aT_e} (e^{-aT_e} + aT_e - 1)$ ; $a_1 = -2e^{-aT_e}$ ; $a_2 = e^{-2aT_e}$	
8	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{(z-1)T_e e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^2}$	
9	$\frac{ab}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{b(1 - e^{-aT_e}) - a(1 - e^{-bT_e})}{b - a}$ ; $b_2 = \frac{a(1 - e^{-bT_e})e^{-aT_e} - b(1 - e^{-aT_e})e^{-bT_e}}{b - a}$ $a_1 = -(e^{-aT_e} + e^{-bT_e})$ ; $a_2 = e^{-(a+b)T_e}$	
10	$\frac{s+c}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{e^{-bT_e} - e^{-aT_e} + c(1 - e^{-bT_e})/b - c(1 - e^{-aT_e})/a}{a - b}$ ; $a_1 = -e^{-aT_e} - e^{-bT_e}$ $b_2 = \frac{c}{ab} e^{-(a+b)T_e} + \frac{b-c}{b(a-b)} e^{-aT_e} + \frac{c-a}{a(a-b)} e^{-bT_e}$ ; $a_2 = e^{-(a+b)T_e}$	
11	$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$b_1 = 1 - e^{-\zeta\omega_0 T_e} \left( \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} T_e) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} T_e) \right)$ ; $a_1 = -2e^{-\zeta\omega_0 T_e} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} T_e)$ $b_2 = e^{-2\zeta\omega_0 T_e} + e^{-\zeta\omega_0 T_e} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} T_e) - \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} T_e) \right)$ ; $a_2 = e^{-2\zeta\omega_0 T_e}$	



12	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$b_1 = \frac{e^{-\zeta\omega_0 T_e}}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} T_e) \quad ; \quad b_2 = -b_1$ $a_1 = -2e^{-\zeta\omega_0 T_e} \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} T_e) \quad ; \quad a_2 = e^{-2\zeta\omega_0 T_e}$
13	$\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$	$b_1 = 1 - \cos \omega T_e \quad ; \quad b_2 = 1 - \cos \omega T_e \quad ; \quad a_1 = -2 \cos \omega T_e \quad ; \quad a_2 = 1$
14	$\frac{\omega s}{s^2 + \omega^2}$	$b_1 = \sin \omega T_e \quad ; \quad b_2 = -\sin \omega T_e \quad ; \quad a_1 = -2 \cos \omega T_e \quad ; \quad a_2 = 1$