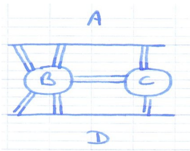
Chapitre 3 : Théorie des Graphes :

1. Historique

1736 : proposition d'Euler : ponts de Königsberg



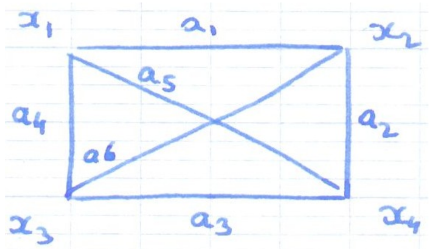
1847 : Kirshoff
1857 : Cayley → introduction de la notion d'arbres
1840 : conjecture des 4 couleurs → résolue en 1976
1859 : Hamilton
1958 : Claude Berge → 1er fondements de cette théorie (maths discrètes, recherche opérationnelle, MSED, ...)

2. Notion de graphe

(a) graphe non orienté

G = (X,A) où X sont les sommets et A les arêtes notées a_i
a est incidente en x,y → a = (x,y) = xy (x est l'extrémité de a)
x est voisin de y. si a = (x,x) alors c'est une boucle

L'ordre du graphe est déterminé par le nombre de sommets de celui-ci
Particularité : dans un graphe on ne prend en compte que les sommets



Il n'y as pas d'intersection entre a_5 et a_6

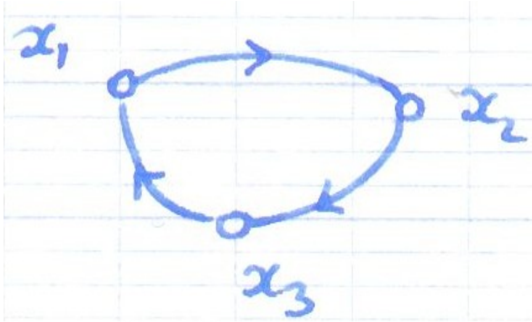
(b) graphe orienté / Digraphe

G = (X,A) où X sont les sommets et A les arcs notés a_i
L'ensemble des arcs est représenté comme une partition dans X x X : $a_1 = (x,y) \neq a_2 = (y,x)$
a = xy , x est l'origine et y la terminaison ou extrémité de cet arc
a est sortant en x, aboutissant en y, incident en y
y est un successeur de x, x est un prédécesseur de y et par définition x et y sont adjacents

les n-graphes : il y a au plus n arcs qui arrivent sur chaque sommet.

(c) application multivoque

Permet de définir la liste des successeur d'un sommet
$\Gamma(x)$: liste des successeurs de x : liste des descendants de x
x_j est successeur de x_i si $(x_i, x_j) \in A$
$\Gamma^{-1}(x)$: liste des prédécesseur (antécédents) de x : liste des ascendants de x



$X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\}$

$\Gamma(x_1) = x_2, x_3, x_1, x_2, ...$

3. Définitions principales

(a) adjacence

Deux sommets sont adjacents s'il sont reliés par un arc

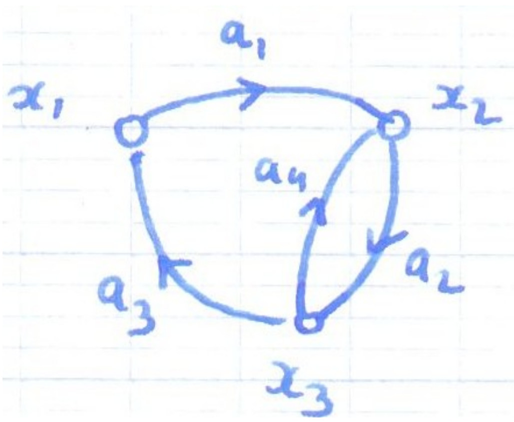
(b) degré d'un graphe

Le degré d'un graphe est le nombre de sommets de celui-ci

(c) degré d'un sommet

demi degré extérieur ou sortant : $d^+(x_i)$: nombre d'arcs qui ont pour origine le sommet xi
demi degré intérieur ou entrant : $d^-(x_i)$: nombre d'arcs aboutissant à ce sommet xi

d'où : degré d'un sommet : $d(x_i) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$



exemple :

$d(x_2)$	$= d^+(x_2)$	+	$d^-(x_2)$
	$= 1$	+	2
	$=$ 3		

Remarque : l'ajout d'une boucle sur un sommet augmente son degré de 2.

(d) sommet source, sommet puit, graphe nul

Sommet dont $d^+(x_i) \neq 0$ et $d^-(x_i) = 0$: Sommet Source
Sommet dont $d^+(x_i) = 0$ et $d^-(x_i) \neq 0$: Sommet Puit
Sommet dont $d^+(x_i) = 0$ et $d^-(x_i) = 0$: Sommet Isolé
Soit $G = (X,A)$: si $A = 0$ alors X sommets isolés
si $X = 0$ alors Graphe Nul

(e) réflexif, symétrique, antisymétrique, transitif

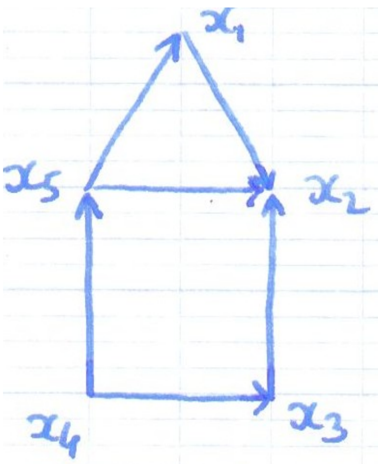
- $\forall\, x \in X, (x,x) \in A$ *(réflexif)*
- $\forall\, (x,y) \in X^2, (x,y) \in A \Rightarrow (y,x) \in A$ *(Symétrique)*
- $\forall\, (x,y) \in X^2, (x,y) \in A \Rightarrow (y,x) \notin A$ *(Antisymétrique)*
- $\forall\, (x,y,z) \in X3, (x,y) \in A, (y,z) \in A \Rightarrow (x,z) \in A$ *(Transitif)*

(f) graphe complet

Un graphe est dit complet si et seulement si
$\forall\, (x,y) \in X^2, (x,y) \notin A \Rightarrow (y,x) \in A$
Ce qui signifie que si le lien xy n'existe pas alors forcément le lien yx existe.

(g) une clique

Une clique c'est l'ensemble des sommets d'un sous graphe complet de G



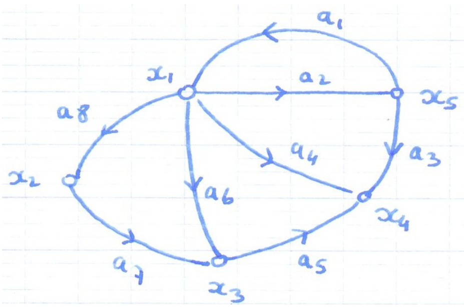
Ce graphe n'est pas complet mais par contre il y a une clique :
$C = \{x_1, x_2, x_5\}$

(h) sous-graphe

$G = (X,A) \Rightarrow G' = (X',A')$
avec $X' \subset X$ et $A' \subset A$

4. Représentation d'un graphe

(a) liste de succession



Descendants	Ascendants
$\Gamma(x_1) = x_2, x_3, x_4, x_5$ $\Gamma(x_2) = x_3$ $\Gamma(x_3) = x_4$ $\Gamma(x_4) = 0$ $\Gamma(x_5) = x_1, x_4$	$\Gamma^{-1}(x_1) = x_5$ $\Gamma^{-1}(x_2) = x_1$ $\Gamma^{-1}(x_3) = x_1, x_2$ $\Gamma^{-1}(x_4) = x_1, x_3, x_5$ $\Gamma^{-1}(x_5) = x_1$

(b) matrice d'adjacence U

Elle consiste à représenter les arcs comme lien entre deux sommets.
G = (X,A) , n = nombre de sommets du graphes alors U est définie dans n x n
et $n_{i,j}$ = 1 si $xy \in A$
= 0 sinon

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Degré ext.
x_1	0	1	1	1	1	$d^+(x_1) = 4$
x_2	0	0	1	0	0	$d^+(x_2) = 1$
x_3	0	0	0	1	0	$d^+(x_3) = 1$
x_4	0	0	0	0	0	$d^+(x_4) = 0$
x_5	1	0	0	1	0	$d^+(x_5) = 2$
Degré int.	$d^-(x_1) = 1$	$d^-(x_2) = 1$	$d^-(x_3) = 2$	$d^-(x_4) = 3$	$d^-(x_5) = 1$	

(c) matrice d'incidence M

G = (X,A) : n sommets et m arcs.
M : n x m avec $m_{i,j}$ = 1 si x_i est l'origine de l'arc a_j
= -1 si x_i est l'extrémité de l'arc a_j
= 0 sinon

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
x_1	-1	1	0	1	0	1	0	1
x_2	0	0	0	0	0	0	1	-1
x_3	0	0	0	0	1	-1	-1	0
x_4	0	0	-1	-1	-1	0	0	0
x_5	1	-1	1	0	0	0	0	0

5. Notion de connexité

(a) chaîne, cycle

Définis pour des graphes non orientés.
Une chaîne est une succession de sommets et d'arêtes (une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes) telle que chaque arête soit incidente avec les sommets qui l'encadrent et la chaîne commence et se termine toujours par un sommet.

Exemple : Chaîne$_1$: x_1, a_8, x_2, a_7, x_3, a_6, x_1

Un cycle est une chaîne qui a le même sommet en début comme en fin.

Exemple : Cycle$_1$: x_1, a_8, x_2, a_7, x_3, a_6, x_1

Longueur d'une chaîne : C'est le nombre d'arête qui composent cette chaîne.
Chaîne élémentaire, Cycle élémentaire :

- une chaîne est dite élémentaire si un sommet n'apparaît pas plus d'une fois dans la chaîne
- un cycle élémentaire est dit élémentaire si un sommet n'apparaît pas plus d'une fois dans le cycle (sauf sommet de début et fin)

(b) chemin, circuit

Définis pour des graphes orientés.
Un chemin est une séquence finie et alternée de sommets et d'arcs tel que chaque arc soit sortant du sommet qui le précède et aboutissant du sommet qui le suit.

Exemple : Chemin$_1$: x_1, a_8, x_2, a_7, x_3, a_5, x_4

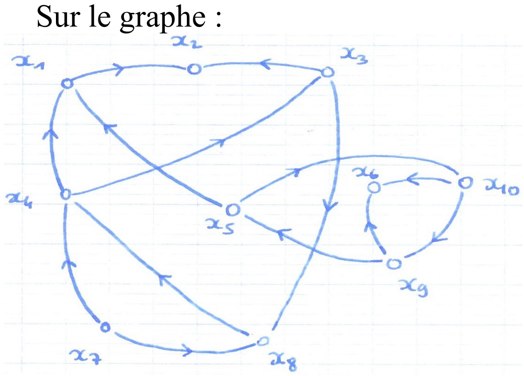
Un circuit est défini comme un chemin qui a le même sommet pour origine et pour extrémité (fin)

Exemple : Circuit$_1$: x_1, a_2, x_5, a_1, x_1

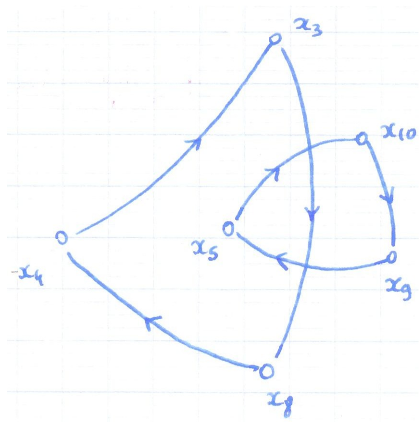
Longueur d'un chemin : C'est le nombre d'arcs qui composent ce chemin.
Chemin élémentaire : Un chemin est dit élémentaire si un sommet n'apparaît pas plus d'une fois dans le chemin.

(c) recherche de circuit dans un graphe

Sur le graphe :



→



Donc 2 circuits qui sont :

- $C_1 = \{x_3, x_8, x_4\}$
- $C_2 = \{x_5, x_{10}, x_9\}$

Algorithme :

1. (1) Repérer le sommet i = 1
2. (2) Tous les arcs sont-ils aboutissants? Incidents?
3. (3) Si oui : on efface le sommet i et les arcs correspondants et on refait (1)
   Sinon : refaire (1) avec i = i + 1

<u>Sur la matrice d'adjacence :</u>

1. (1) i = 1
2. (2) La colonne i ou la ligne i ne contient-elle que des zéros?
3. (3) Si oui : on barre la colonne et la ligne de zéros et on refait (1)
   Sinon : refaire le (1) avec i = i + 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	~~1~~	~~1~~	~~1~~	1
x_2	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
x_3	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
x_4	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
x_5	1	~~0~~	~~0~~	~~1~~	0

Tout d'abord pour i = 4 : ligne 4 donc on barre C_4 et L_4
Puis pour i = 3 : ligne 3 donc on barre C_3 et L_3
Et enfin pour i = 2 : ligne 2 donc on barre C_2 et L_2

Il reste au final Circuit = $\{x_1, x_5\}$

<u>Liste de succession :</u>
Rechercher les groupes de sommets qui reviennent de façon cyclique.

(d) <u>Graphes Connexes</u>

Graphes connexes s'il existe une chaîne permettant de relier tout sommet i du graphe à un sommet j quelconque

$x_i \, R \, x_j$ | Soit $x_i = x_j$ | Relation
Soit il existe une chaîne liant x_i à x_j | D'équivalence (R, S, T)

(e) <u>Graphes Fortement Connexes (GFC)</u>

GFC s'il existe un chemin permettant de lier (entre) deux sommets quelconques du graphe.

$x_i \, R \, x_j$ | Soit $x_i = x_j$ | Relation
Soit il existe un chemin liant x_i à x_j (et réciproquement) | D'équivalence (R, S, T)

<u>Composantes Fortement Connexes (CFC) :</u>

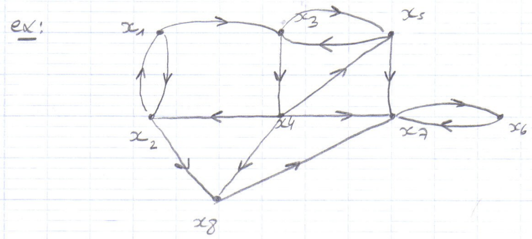
De ces relations, on peut déduire des classes d'équivalence, (CFC), représentant l'ensemble des sommets en relation ce qui permet de représenter le graphe réduit (qui lui est sans circuit)

(f) méthode de Malgrange

<u>Recherche des CFC dans un graphe :</u>

(1) Init i = 1
(2) Établir la liste des descendants et des antécédents de x_i ($x_i \in$ aux deux listes)
(3) Recherche des sommets communs à ces deux listes
(4) En déduire la (ou les) CFC
(5) Supprimer les sommets de la CFC du graphe et retour en (2)

exemple :

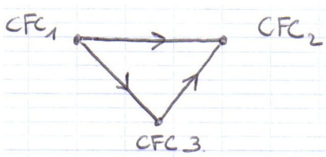


$LD(x_1) = \{x_1 ; x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$LA(x_1) : x_1$
$\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3\}$	$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_2\}$
$\Gamma(x_2) = \{x_1, x_8\}$	$\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_1, x_4\}$
$\Gamma(x_3) = \{x_4, x_5\}$	$\Gamma^{-1}(x_4) = \{x_3\}$
$\Gamma(x_8) = \{x_7\}$	$\Gamma^{-1}(x_3) = \{x_5, x_1\}$
$\Gamma(x_4) = \{x_2, x_5, x_7, x_8\}$	$\Gamma^{-1}(x_5) = \{x_3, x_4\}$
$\Gamma(x_5) = \{x_3, x_7\}$	$LA(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
$\Gamma(x_7) = \{x_6\}$	
$\Gamma(x_6) = \{x_7\}$	Donc $\boxed{CFC_1} = LD(x_1) \cap LA(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$LD(x_6) = \{x_6, x_7\}$	$LA(x_6) = \{x_6, x_4, x_5, x_8, \dots\}$ $\boxed{CFC_2 =}$ $LD(x_6) \cap LA(x_6) = \{x_6, x_7\}$
$\Gamma(x_6) = \{x_7\}$	$\Gamma^{-1}(x_6) = \{x_7\}$
$\Gamma(x_7) = \{x_6\}$	$\Gamma^{-1}(x_7) = \{x_4, x_5, x_6, x_8\}$
	...

$LD(x_8) = \{x_8, x_6, x_7\}$	$LA(x_8) = \{x_8, x_2, x_1, x_3, x_4\}$ $\boxed{CFC_3 =}$ $LD(x_8) \cap LA(x_8) = \{x_8\}$
$\Gamma(x_8) = \{x_7\}$	$\Gamma^{-1}(x_8) = x_2, x_4$
$\Gamma(x_7) = \{x_6\}$	$\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_1, x_4\}$
$\Gamma(x_6) = \{x_7\}$	$\Gamma^{-1}(x_4) = \{x_3\}$
	$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_2\}$

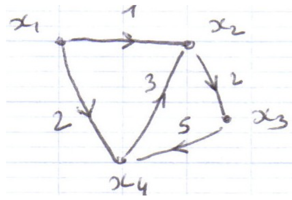
D'où le graphe réduit :



6. Graphes particuliers

(a) graphes valués (ou capacité ou étiquette)

G = (X,A,C), où C est la valeur (ou capacité ou étiquette)

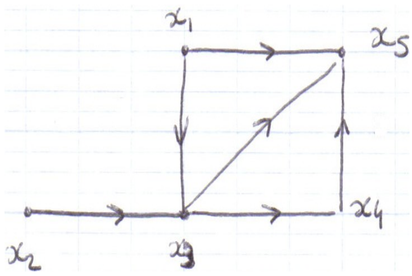


(b) graphes sans circuit

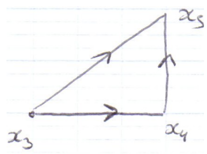
cela suppose des graphes hiérarchiques.
Pour ordonner le graphe, on réalise l'algorithme suivant :

(1) Init i = 1
(2) Rechercher des sommets sans antécédents ($d^- = 0$) : Soit $M = \{x_i, d^-(x_i) = 0\}$ → Sommets de même rang
(3) Supprimer les arcs des sommets de M
(4) Retour en (2)

Exemple :

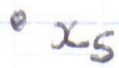


$M = \{x_1, x_2\}$ →

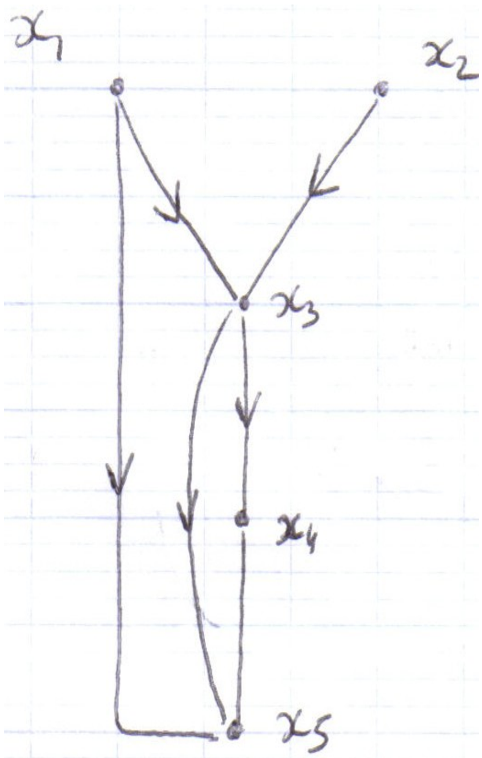


puis, $M = \{x_3\}$ →

et $M = \{x_4\}$ →



et finalement $M = \{x_5\}$
D'où :



Sur la matrice d'adjacence on obtient :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	1	0	1
x_2	0	0	1	0	0
x_3	0	0	0	1	1
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	0	0	0

Colonnes de « 0 » (pas d'antécédent) : les sommets de rang les plus élevés, on supprime les lignes et colonnes de ces sommets.

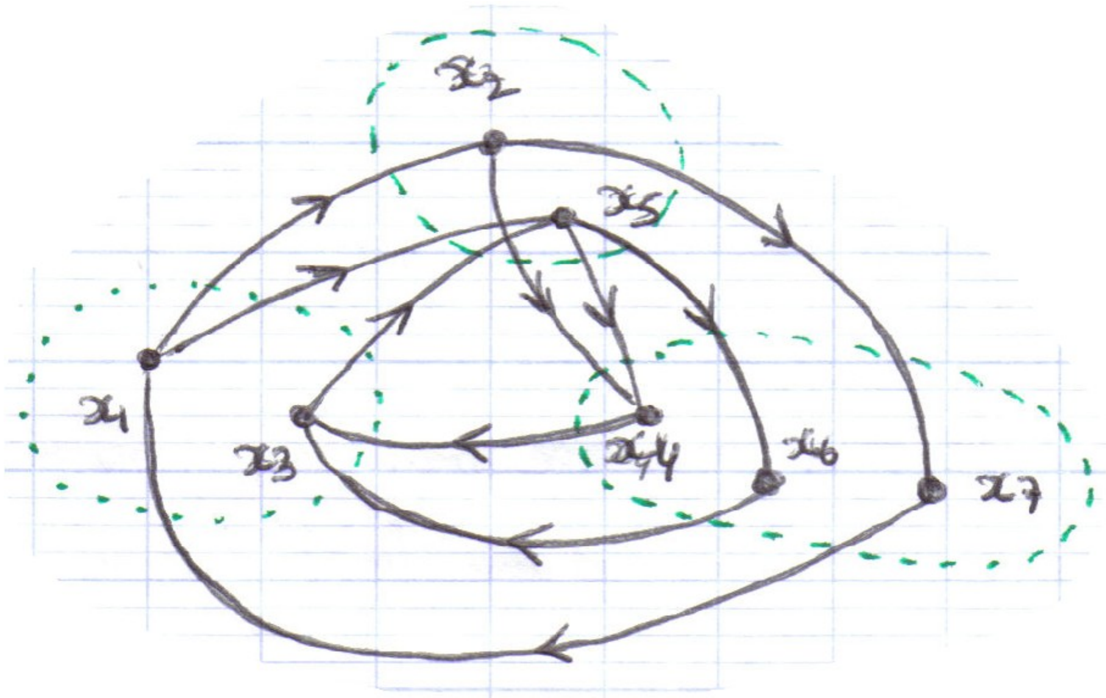
Donc x_1 colonne de 0, on supprime L_1, C_1
et x_3 colonne de 0, on supprime L_3, C_3
puis x_2 colonne de 0, on supprime L_2, C_2
et enfin x_5

→ **D'où hiérarchie.**

(c) graphes périodiques

Un graphe est périodique s'il peut être décomposé en sous classes telles que :

- Aucun arc ne lie les sommets d'une même classe.
- Tout sommet est transitoire : $\forall x_i$, $d^+(x_i) \neq 0$ et $d^-(x_i) \neq 0$
- Les sous classes sont disposées de façon circulaire.



Périodicité : 3 (car il y a 3 sous-classes)

	x_1	x_3	x_2	x_5	x_4	x_6	x_7
x_1	0	0	1	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1	0	0	0
x_2	0	0	0	0	1	0	1
x_5	0	0	0	0	1	1	0
x_4	0	1	0	0	0	0	0
x_6	0	1	0	0	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	0

3 blocs de relations → 3 sous classes → périodicité de 3

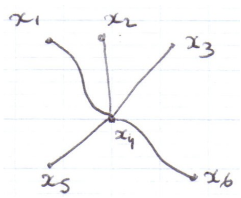
(d) graphes disjoints

(1) Rendre le graphe symétrique (GFC) : consiste en : si l'arc xy existe, alors créer l'arc yx.
(2) Rechercher des CFC (méthode de Malgrange).
(3) Chaque CFC correspond à un graphe : si plusieurs CFC, alors plusieurs graphes disjoints.

(e) arbres, forêts, arborescences

Arbre : graphe particulier qui ne contient pas de cycle, qui est non orienté et connexe. Si l'arbre contient tous les sommets du graphe, on parlera d'arbre courant ou arbre de couverture.
Si l'arbre est valué, on parlera d'arbre couvrant de poids minimum.

Exemple :



Forêts : graphe non orienté, et acyclique mais pas forcément connexe et chaque composante connexe d'une forêt est un arbre.

Arborescence : graphe orienté par lequel chaque sommet a un seul antécédent sauf un sommet qui n'a pas d'antécédent appelé **racine.**
∀x, il existe un seul chemin unique partant de la racine et conduisant à x.

Les sommets sans successeur sont appelés des **feuilles**.

Recherche d'arborescence :
(1) Recherche des CFC : si chaque sommet du graphe est une CFC, c'est une arborescence.
(2) Pour vérifier (2) : Analyse de la matrice d'adjacence.
- ➔ Si une seule colonne k est ide : k est racine.
- ➔ Si toutes les colonnes sauf k contiennent un et un seul 1 : k racine.
- ➔ Si la première diagonale est vide (graphe non réflexif) : k racine.

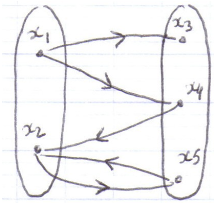
(f) graphes biparti, biparti complet, planaire

Graphe biparti :

$G = (X,A)$
$X = X_1 \cup X_2$
$\forall xy \in A,\ x \in X_i \Rightarrow y \in X_j$

Graphes dont les sommets peuvent être séparés en deux sous-ensembles tel qu'il n'y ait pas de lien entre les sommets d'un même sous-ensemble.

Exemple :



Graphe biparti complet noté $K_{n,m}$:

n : nombre de sommets de la 1ère classe
m : nombre de sommets de la 2ème classe

Graphe planaire :

Graphe qui peut être représenté dans un plan (une sphère) tel que ses arcs (arêtes) ne se coupent pas.

- Tous les graphes de moins de 5 sommets sont planaires.
- Tous les graphes biparti de moins de 6 sommets sont planaires.
- Tout graphe planaire est 4 coloriable.

(g) Réseaux

Les réseaux sont définis comme des graphes orientés, connexes, acycliques, asymétriques avec une entrée (un sommet source) et une sortie (Un sommet puit).

7. Parcours

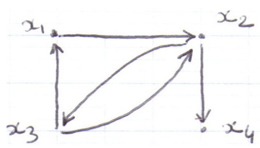
(a) Définition

Chaîne, cycle : graphe non orienté
Chemin, circuit : graphe orienté
Chaîne simple : chaîne contenant au plus une fois une arête.
Chaîne élémentaire : Chaîne contenant une fois ou plus un sommet.

(b) Recherche de la longueur d'un parcours

$$A = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Entre x_1 et x_2 il y a un chemin de longueur 2
x_3 et x_3 il y a un chemin de longueur 2
...



$A^n \longrightarrow$ chemins de longueur n

(c) recherche du plus court chemin

Djikstra (1959)
Entre Entrée et Sortie

(1) Init $i = E$ $\quad \pi(E) = 0$ $\quad \overline{S} = \{A, B, \dots, S\}$

$\pi(x_i \in \overline{S}) = \infty$

On calcule : $\pi(i) \in \Gamma(E)) = l_{Ei}$

(2) Sélectionner i, $\pi(i)$ soit minimum

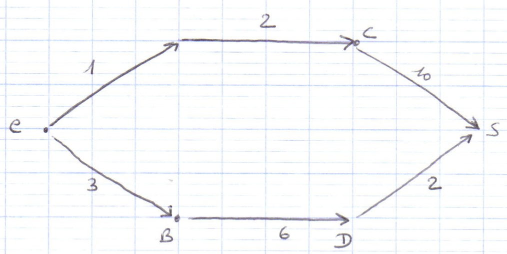
$\overline{S} = \overline{S} \backslash \{i\}$

si $\overline{S} = 0 \Rightarrow$ Fin.

(3) Sinon, calculer pour tous les sommets $j \in \Gamma(i) \cap \overline{S}$

$\pi(j) = \min(\pi(j), \pi(i) + l_{ij})$

puis retourner en (2)



init : $\pi(e) = 0$ $\quad \overline{S} = \{A, B, C, D, S\}$

$\Gamma(e) = \{A, B\}$ $\quad \underbrace{\pi(A) = 1}_{\text{le mini}}$ et $\pi(B) = 3$, $\pi(C) = \pi(D) = \pi(S) = \infty$

Pour $i = A$:

$\overline{S} = \{B, C, D, S\}$ $\quad \Gamma(A) = \{C\}$ $\quad \Gamma(A) \cap \overline{S} = \{C\}$

Donc $\pi(C) = \min(\pi(C), \pi(A) + l_{AC}) = \min(\infty, 1+2=3) = 3$.

Pour $i = C$:

$\overline{S} = \{B, D, S\}$, $\Gamma(C) = \{S\}$ donc $\Gamma(C) \cap \overline{S} = \{S\}$

Donc $\pi(S) = \min(\pi(S), \pi(C) + l_{CS}) = \min(\infty, 3+10) = 13$.

Pour $i = B$:

$\overline{S} = \{D, S\}$, $\Gamma(B) = \{D\}$ et $\Gamma(B) \cap \{\overline{S}\} = \{D\}$.

Donc $\pi(D) = \min(\pi(D), \pi(B) + l_{BD}) = \min(\infty, 3+6) = 9$

Pour $i = D$:

$\overline{S} = \{S\}$ et $\Gamma(D) = \{S\}$ et $\Gamma(D) \cap \overline{S} = \{S\}$

Donc $\pi(S) = \min(\pi(S), \pi(D) + l_{DS}) = \min(13, 9+2) = 11$.

Pour $i = S$: $\quad \overline{S} = \{\emptyset\} \Longrightarrow$ fin.

(d) *Parcours eulériens*

Non orienté : chaîne eulérienne : si cette chaîne emprunte une et une seule fois chaque arête du graphe
Cycle eulérien : …

On dira qu'un graphe est eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degrés impairs est égal à 0 ou 2.

Orienté : Chemin eulérien : …
Circuit eulérien : …

On dira qu'un graphe est eulérien si et seulement si il admet un circuit eulérien.
On dira aussi qu'un graphe admet un chemin eulérien si et seulement si pour tout sommet du graphe, $d^- = d^+$ et deux sommets particuliers : $d^-(a) = d^+(a) - 1$ et $d^-(b) = d^+(b) + 1$

(e) *Parcours hamiltonien*

chaîne, cycle, chemin, circuit (mêmes définitions)
Le parcours : passe par une et une seule fois par chaque sommet du graphe

8. Coloration d'un graphe

(a) *coloration des sommets, arc/arêtes*

Coloration des sommets consiste à associer (affecter) à chaque sommet une couleur telle que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Nombre chromatique : nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets du graphe. Noté $\gamma(G)$
Indice chromatique : nombre de couleurs nécessaires pour colorer les arêtes/arcs du graphe.

(b) *sous-ensemble stable*

$G = (X,A)$, $S \subset X$, S est un sous-ensemble stable si et seulement si

$$\forall (i, j) \in S, (i, j) \notin A$$

S : ensemble des sommets non adjacents.

$\gamma(G) \geq dmax + 1$

$\gamma(G) \geq$ n(nombre de sommets) / [n – dmin] (dmin = degré mini des sommets de G)

$\gamma(G) \geq w(G)$ = Card (la plus grande clique)

$\gamma(G) \geq n^2 / [n^2 - 2m]$ (m = nombre d'arcs)

$\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$, où $\alpha(G)$ = Card (Smax)

$\gamma(G) \geq n / \alpha(G)$