UNIVERSITE HENRI POINCARE NANCY I
ESIAL

ESIAL $1^{ère}$ année	Durée du sujet : 2h
Epreuve de MD (Mathématiques Discrètes)	
Date : 28 mars 2007	**Documents non autorisés**
Horaire : 10h à 12h	**Calculatrices non autorisées**

NB : le barème est donné à titre indicatif. Les exercices sont indépendants. Les réponses aux questions doivent être justifiées.

Questions de cours (3 points)

1. Donnez la définition d'une formule polie ainsi qu'un exemple d'une formule qui ne l'est pas.
2. Donnez la définition d'une tautologie.
3. Donnez la définition d'un symbole de Skolem.
4. Expliquez pourquoi la méthode LR(1) est plus puissante que la méthode SLR(1), dans le domaine de l'analyse syntaxique ascendante.

Exercice 1 : logique des propositions (2 points)

Mettez sous forme clausale la formule $\alpha = \neg[(b \Rightarrow c) \vee (b \wedge a)] \Rightarrow \neg[a \vee (b \wedge c)$. Que pouvez-vous en déduire pour α ?

Exercice 2 : logique du premier ordre (4 points)

Démontrez que la formule α suivante est un théorème de la logique du premier ordre.

$\alpha = ((\forall x\ \exists y\ r(x,\ y)) \wedge \forall x\ \forall y\ (r(x,\ y) \wedge p(x) \Rightarrow s(x,\ y))) \Rightarrow (\exists y\ (p(x) \Rightarrow s(x,\ y)))$

Vous détaillerez précisément chacune des étapes de votre démarche.

Exercice 3 : analyse syntaxique descendante (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Expliquez ce qui empêche d'analyser la grammaire suivante par une méthode d'analyse syntaxique descendante :

$$\begin{array}{l} E \rightarrow E + T \mid T \\ T \rightarrow T * F \mid F \\ F \rightarrow (E) \mid i \end{array}$$

et remédier au problème (on ne demande pas d'analyser la grammaire obtenue).

B) 1. On considère la grammaire

$$G = (\{X,\ A\}, \{(,), ;, a, \}, \left\{ \begin{array}{l} X \rightarrow (XBX) \mid A \mid (X) \\ A \rightarrow bX \mid b \\ B \rightarrow a \mid aB \end{array} \right\}, X)$$

Ecrivez la grammaire G sous forme arborescente et mettez en évidence les nœuds et les tests qui doivent être effectués pour rendre les procédures d'analyse syntaxique déterministes. G est-elle LALL(1) ?

2. Ecrivez le programme principal, la procédure d'analyse d'un non terminal ainsi que la procédure d'analyse Ana-A.

Exercice 4 : analyse syntaxique ascendante (5 points)

1. La grammaire suivante est-elle SLR(1) ? LR(1) ? LALR(1) ?
   (Justifiez précisément vos réponses)

$$G = (\{A,\ B,\ S\}, \{a,\ b,\ c\}, \left\{ \begin{array}{l} S \to Aa \mid Bb \\ A \to cAb \mid c \\ B \to c \end{array} \right\}, S)$$

   Dressez la table d'actions-transitions de la méthode la plus adaptée (parmi SLR(1), LR(1) et LALR(1)) à cette grammaire.
2. Analysez le mot *cccbba*.

Exercice 5 : logique des propositions (2 points)

On considère un ensemble fini de n variables propositionnelles $P = \{p_1, ..., p_n\}$ et $Prop(P)$ l'ensemble des formules du calcul des propositions. Pour toute formule α de $Prop(P)$, on note $V(\alpha)$ le sous-ensemble de P des variables apparaissant dans α. On dit qu'une formule est sous forme normale conjonctive si elle est de la forme $C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_m$ où $m \geq 0$ et $C_1, ..., C_m$ sont des clauses. Une formule de Horn est une formule sous forme normale conjonctive telle que chacune de ses clauses comporte au plus un littéral positif. Enfin, on rappelle qu'une formule α est satisfiable ssi il existe un modèle de α.

1. Soit α une formule de $Prop(P)$ sous forme normale conjonctive telle que chacune de ses clauses contienne au moins un littéral négatif. Montrez que α est satisfiable en exhibant une valuation de P.
2. Soit α une formule de Horn telle qu'une de ses clauses soit restreinte à un littéral positif p_k (où k est dans $\{1, \ldots, n\}$), et qu'aucune autre de ses clauses ne soit restreinte à $\neg p_k$. Montrez que l'on peut construire à partir de α une formule de Horn α' telle que :
   - $V(\alpha') \subset V(\alpha) \setminus \{p_k\}$,
   - α est satisfiable si et seulement si α' est satisfiable.
3. Déduisez des deux questions précédentes un algorithme permettant de déterminer si une formule de Horn α est satisfiable. N'oubliez pas le cas où α est la formule vide (toujours vraie).