TD2

MAD

1

Exercice 1:

1) $a \vee \mathcal{F}$ est sémantiquement équivalent à a.

$\mathcal{F}$ est l'élément neutre de l'opération $\vee$.
Ceci implique que la clause vide $\square$ (disjonction vide de littéraux est sémantiquement équivalent à $\mathcal{F}$. (un litéral est soit a ou $\neg a$))

La clause vide modélise "le faux" ou la contradiction.

2) $f \wedge \mathcal{V}$ est sémantiquement équivalente à f;
$\mathcal{V}$ peut donc être vu comme l'élément neutre de l'opération $\wedge$.
Une disjonction vide de formules est donc sémantiquement équivalente à $\mathcal{V}$.
La conséquence de ce résultat est que lorsqu'on met une formule sous forme clausale et qu'on obtient une conjonction vide de clause, cette formule est sémantiquement équivalente à $\mathcal{V}$.
$\Rightarrow$ Donc c'est une tautologie.

Exercice 2:

$f_1 = p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$ soit $C(f_1) = \{\neg p \vee q\}$ 1 clause.

$f_2 = \neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$ $C(f_2) = \{p \wedge \neg q\}$ 2 clauses.

$f_3 = p \Rightarrow (q \vee r) \equiv \neg p \vee q \vee r$ $C(f_3) = \{\neg p \vee q \vee r\}$ 1 clause.

$f_4 = (p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ $C(f_4) = \{p \vee r \,;\, q \vee r\}$ 2 clauses.

$f_5 = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$ $C(f_5) = \{\neg p \vee q \,;\, \neg q \vee r\}$ 2 clauses.

$f_6 = (p \wedge r) \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge r) \vee q \equiv \neg p \vee \neg r \vee q$ $C(f_6) = \{\neg p \vee \neg r \vee q\}$ 1 clause

$f_7 = \neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow r) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)$

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \ldots$ $C(f_7) = \{p \vee q \,;\, p \vee \neg r \,;\, \neg q \vee \neg r\}$ 3 clauses

$f_8 = p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

$C(f_8) = \{\neg p \vee q \,;\, \neg q \vee p\}$ 2 clauses.

$f_9 = p \Rightarrow p \vee q. \equiv \neg p \vee (p \vee q)$ $\Rightarrow$ ce n'est pas une clause.
$\Rightarrow$ sémantiquement équivalent à $\mathcal{V}$
$\Rightarrow$ c'est une tautologie.

Exercice 3 :

$c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee c_4$ se déduit par résolution entre $c_1 \vee a \vee c_2$.
et $c_3 \vee \neg a \vee c_4$.

① $C_1 = \{ \overbrace{\neg a \vee \neg b \neg c}^{c_1}, \overbrace{a}^{c_2}, \overbrace{\neg c}^{c_3}, \overbrace{b}^{c_4} \}$

$c_5 = \neg a \vee \neg b$ par résolution entre c_1 et c_3.

$c_6 = \neg b$ par ———— c_5 et c_2.

$\square$ ———— c_6 et c_4.

② $C_2 = \{ \overbrace{\neg a \vee \neg b \vee c}^{c_1}, \overbrace{\neg a \vee b}^{c_2}, \overbrace{a}^{c_3}, \overbrace{\neg c}^{c_4} \}$

$c_5 = \neg a \vee \neg b$ par résolution entre c_1 et c_4

$c_6 = \neg a \vee \neg a$ ———— c_5 et c_2

$= \neg a$

$c_7 = \square$ ———— c_6 et c_3.

③ $C_3 = \{ \overbrace{\neg a \vee \neg b}^{c_1}, \overbrace{\neg c \vee a}^{c_2}, \overbrace{c}^{c_3}, \overbrace{\neg d \vee b}^{c_4}, \overbrace{d \vee b}^{c_5} \}$

$c_6 = \neg b \vee \neg c$ par résolution entre c_1 et c_2

$c_7 = \neg b$ ———— c_6 et c_3

$c_8 = b$ ———— c_4 et c_5

$c_9 = \square$ ———— c_7 et c_8

④ $C_4 = \{ \neg a \vee \neg b \vee c \vee d, \neg c \vee \neg e \vee \neg f, \neg a \vee \neg d, b \vee c, a \vee c, \neg c \vee e, \neg c \vee f \}$

TD2
MAD
2

Exercice 4 :

pour chaque variable propositionnelle a_i, il y a 3 choix possibles.

- a_i n'apparaît pas dans la clause
- a_i apparaît sous forme de a_i
- a_i apparaît sous forme de $\neg a_i$.

} 3^n clauses.

pour $n = 2$:
9 clauses :
$\square$; a_1 ; a_2 ; $a_1 \vee a_2$; $\neg a_1 \vee a_2$; $\neg a_1$; $\neg a_2$; $a_1 \vee \neg a_2$; $\neg a_1 \vee \neg a_2$

Exercice 5 :

① $C = \{ \underbrace{\neg a \vee \neg b \vee c}_{c_1} ; \underbrace{\neg b \vee \neg c}_{c_2} ; \underbrace{\neg a \vee b}_{c_3} ; \underbrace{a}_{c_4} \}$

$c_5 = b$ par résolution de c_3 et c_4
$c_6 = \neg c$ ——— c_5 et c_2
$c_7 = \neg a \vee \neg b$ ——— c_6 et c_1
$c_8 = \neg a$ ——— c_5 et c_7
$c_9 = \square$ ——— c_8 et c_4.

$\Rightarrow$ réfutation de C.

②

par résolution : c_1 et $c_3 \Rightarrow (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b)$
$\Rightarrow \neg a \vee c$.