

# ESIAL 1 — Module Mathématiques appliquées discrètes

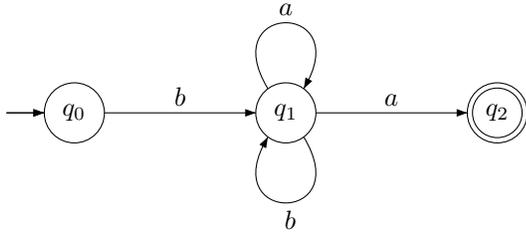
## Théorie des langages : automates

Langage régulier, automate fini, représentation sagittale d'un automate, notion de calcul, automate fini indéterministe, automate fini déterministe, théorème de Kleene, algorithme traduisant une ER en AF et inversement.

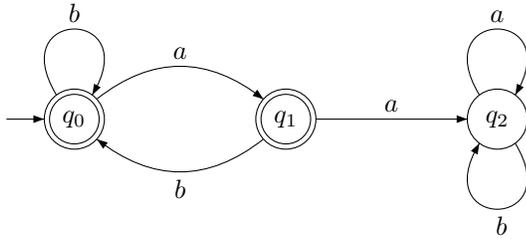
### Exercice 1

Soient l'alphabet  $\{a, b\}$ . Pour chacun des automates suivants déterminer les éléments suivants :  $Q$ , l'ensemble des états,  $I$ , l'ensemble des états initiaux,  $E$ , l'ensemble des transitions et  $F$ , l'ensemble des états finaux. Déterminer le langage accepté par l'automate. Déterminer si l'automate est indéterministe ou déterministe.

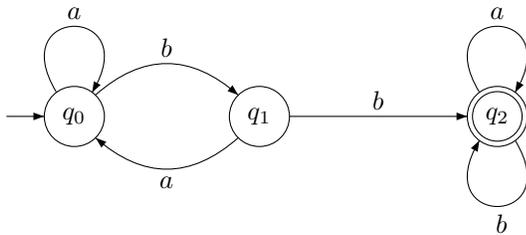
$\mathcal{A}_1$



$\mathcal{A}_2$



$\mathcal{A}_3$



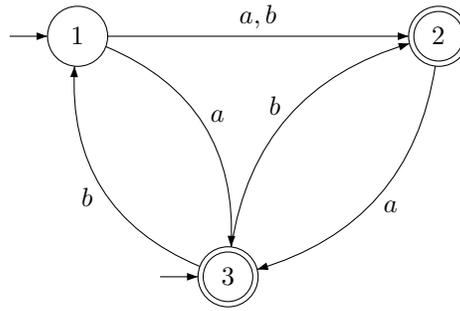
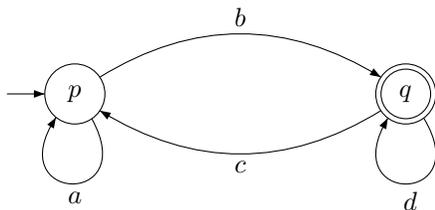
### Exercice 2

Construire des automates finis reconnaissant les langages dénotés par les expressions rationnelles suivantes sur l'alphabet  $\{a, b\}$  :

1.  $e_1 = (a + b)^*$
2.  $e_2 = (a^*b)^*$
3.  $e_3 = (a^*b + bb^*a)^*$

### Exercice 3

Déterminer les expressions rationnelles associées aux automates suivants :



#### Exercice 4

Soit l'exercice suivant<sup>1</sup>.

- Quatre verres sont sur un plateau. Ils sont disposés aux sommets d'un carré, tantôt à l'endroit, tantôt à l'envers.
- Un barman aveugle et avec des gants de boxe essaie de mettre tous les verres dans le même sens (peu importe le sens).
- A chaque fois qu'il va faire un essai, une personne farceuse mais honnête tourne le plateau à sa guise (rotation de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  ou  $270^\circ$  pour que les verres restent aux 4 sommets du carré), le laisse effectuer sa manipulation (retourner un verre ou deux : le barman n'a que deux mains!) puis lui dit s'il a réussi. Pouvez-vous aider le barman à gagner, c'est à dire à mettre tous les verres dans le même sens ?

**Questions** Pour résoudre cet exercice nous allons construire un automate dont les états sont les différentes configurations du plateau et dont les étiquettes des transitions sont les différentes manipulations effectuées par le barman.

1. Montrer que l'ensemble des configurations peut se partitionner en 4 classes d'équivalences.
2. Montrer que le nombre de choix possibles de manipulations du barman peut se ramener à 3 si l'on considère les configurations de la question précédente.
3. On note  $a$ ,  $b$  et  $c$  les manipulations suivantes :
  - $a$  : retournement de 1 verre
  - $b$  : retournement de 2 verres adjacents
  - $c$  : on retournement de 2 verres opposés
 Expliciter complètement l'automate en le dessinant. Montrer que cet automate a 3 états initiaux et 1 état final. Pour quelles raisons cet automate est-il indéterministe ?
4. Montrer que le mot  $cbcacbc$  définit une stratégie gagnante pour le barman.

<sup>1</sup>Exercice dû à Nathalie Revol ENS-Lyon et repris par Véronique Juillac, Lycée Montdory-Thiers.