

### Exercice 1

On considère la formule  $\alpha$  suivante :

$$\alpha = [x \Rightarrow (\neg y \Rightarrow (t \wedge u \Rightarrow \neg z))] \Rightarrow [(x \wedge y) \vee \{\neg((\neg y \Rightarrow z) \Rightarrow (u \Rightarrow \neg x)) \Rightarrow (z \wedge \neg t)\}].$$

1. Mettre cette formule sous forme clausale en utilisant l'algorithme de mise sous forme clausale vu en cours<sup>1</sup>. Que pouvez-vous en déduire?
2. Obtenir une deuxième fois ce résultat grâce à la démonstration de  $\{\alpha_1\} \vdash \alpha_2$  où

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= x \Rightarrow (\neg y \Rightarrow (t \wedge u \Rightarrow \neg z)) \\ \alpha_2 &= (x \wedge y) \vee \{\neg((\neg y \Rightarrow z) \Rightarrow (u \Rightarrow \neg x)) \Rightarrow (z \wedge \neg t)\}\end{aligned}$$

et ceci en utilisant la méthode de réfutation de Robinson.

### Exercice 2

Résoudre le problème logique suivant. Un homme déclare :

- Le jour où je ne bois pas et où je dors, je ne suis pas content,
- Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors,
- Le jour où je ne mange pas, je ne suis pas content ou je dors,
- Le jour où je mange, je suis content ou je bois,
- Le jour où il ne pleut pas et où je suis content, je ne mange pas,
- Mais aujourd'hui je suis content.

Question : quel temps fait-il aujourd'hui ?

Indications : essayer de déduire qu' "il pleut" ou qu' "il ne pleut pas" à partir de ces affirmations, après avoir montré que l'ensemble des affirmations n'est pas contradictoire.

### Exercice 3

Lors des réunions on sait que :

- Quand Marie est là, c'est qu'elle accompagne Paul ou Jean.
- Paul ne vient jamais en même temps que son cousin Serge.
- Si Jean et Serge viennent tous les deux, leur sœur Louise les accompagne.
- Si Louise vient alors Raoul ne reste pas.
- Hier Raoul et Serge étaient présents jusqu'au bout.

1. Montrer que l'ensemble des affirmations précédentes n'est pas contradictoires.
2. Que pouvez-vous déduire sur la présence de Marie, Paul, Jean et Louise ?

### Exercice 4

On considère le règlement suivant concernant un club écossais.

- Article 1 : un membre non écossais porte des chaussettes rouges.
- Article 2 : un membre porte un kilt ou ne porte pas de chaussettes rouges.
- Article 3 : les membres mariés ne sortent pas le dimanche.
- Article 4 : un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.
- Article 5 : un membre qui porte un kilt est écossais et marié.
- Article 6 : un membre écossais porte un kilt.

Ecrire une formalisation des articles précédents. Y-a-t-il des membres dans ce club ?

### Exercice 5

Soit la formule  $\alpha$  suivante :

$$\alpha = [x \Rightarrow (\neg y \Rightarrow (t \wedge u \Rightarrow \neg z))] \Rightarrow [(x \wedge y) \vee \{\neg((\neg y \Rightarrow z) \Rightarrow (u \Rightarrow \neg x)) \Rightarrow (z \wedge \neg t)\}].$$

Montrer que  $\alpha$  est une tautologie en faisant une analyse sémantique intelligente de cette formule.

Comparer cette méthode avec l'algorithme de mise sous forme clausale.

Indications : mettre la formule  $\alpha$  sous forme d'un arbre abstrait, essayer de trouver un contre modèle de  $\alpha$  et montrer que cela mène à une contradiction.

<sup>1</sup>MATHÉMATIQUES DISCRÈTES. Automates, langages, logique et décidabilité. Pierre Marchand. DUNOD.