ESIAL 1 — Module Mathématiques appliquées discrètes

Logique des propositions : syntaxe et sémantique

Exercice 1

On considère l'ensemble $P = \{p,\ q,\ r,\ s,\ t\}$ de variables propositionnelles. Pour chacune des formules suivantes donner

- l'arbre abstrait de la formule si la formule appartient à $Prop(P)$, c'est-à-dire si la formule est bien formée
- une expression infixée, débarrassée des parenthèses superflues en tenant compte des priorités des connecteurs logiques (par ordre de priorité décroissante $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ et "parenthèsage" gauche-droite)

1. $\neg((q \Rightarrow r) \vee p)$
2. $(((p \wedge q)\neg r) \Rightarrow p)$
3. $((\neg p \Rightarrow (\neg r \vee q)) \Rightarrow p)$
4. $(\neg\neg(q \Rightarrow r) \vee (\neg q \Rightarrow \neg r))$
5. $(p \vee (\neg q \wedge (r \wedge s)))$
6. $(((p \wedge (\neg q)) \vee r) \Rightarrow (s \wedge t))$

Exercice 2

Cet exercice a seulement pour but de rappeler la terminologie relative à la logique des propositions. On considère la formule α suivante : $\alpha = [(a \Rightarrow b) \wedge ((c \vee \neg b) \Rightarrow a)] \Rightarrow (b \wedge c)$

1. Quelles sont les variables propositionnelles intervenant dans α ? Sur quelles variables propositionnelles doit-on connaître la valeur d'une valuation pour connaître la valeur correspondante de α ?
2. Donner la sémantique de cette formule α.
3. Cette formule admet-elle un modèle ? Donner un exemple de modèle de cette formule. Cette formule est-elle une tautologie ? est-elle contradictoire ?

Exercice 3

La logique des propositions est couramment utilisée pour modéliser des énoncés exprimés dans les langages naturels (français, anglais, ...). Dans le contexte des langages naturels, une *proposition* est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse.

Par exemple :

Les affirmations suivantes sont des propositions :

"2 plus 3 font 5"

"π est compris entre 4 et 5"

alors que les affirmations suivantes ne le sont pas :

"la présente affirmation est fausse"

"tout nombre réel strictement négatif n'est pas un carré"

La première affirmation conduit à un paradoxe, la seconde est une phrase trop imprécise, il faudrait préciser à quel ensemble appartient le nombre dont on prend le carré ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ...).

1. En notant p et q les affirmations suivantes :

   p = "Jean est fort en maths"

   q = "Jean est fort en chimie"

   Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres p et q et des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

   (a) "Jean est fort en maths mais faible en chimie"

   (b) "Jean n'est fort ni en maths ni en chimie"

   (c) "Jean est fort en maths ou il est à la fois fort en chimie et faible en maths"

   (d) "Jean est fort en maths s'il est fort en chimie"

   (e) "Jean est fort en chimie et en maths ou il est fort en chimie et faible en maths"

2. En notant p, q et r les affirmations suivantes :

p = “Pierre fait des maths”
q = “Pierre fait de la chimie”
r = “Pierre fait de l’anglais”

représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l’aide des lettres p, q, r et des connecteurs usuels.

(a) “Pierre fait des maths et de l’anglais mais pas de la chimie”
(b) “Pierre fait des maths et de la chimie mais pas à la fois de la chimie et de l’anglais”
(c) “il est faux que Pierre fasse de l’anglais sans faire de maths”
(d) “il est faux que Pierre ne fasse pas des maths et fasse quand même de la chimie”
(e) “il est faux que Pierre fasse de l’anglais ou de la chimie sans faire de maths”
(f) “Pierre ne fait ni anglais ni chimie mais il fait des maths”

3. Enoncer la négation des affirmations suivantes en évitant d’employer l’expression : “...il est faux ...”

(a) “si demain il pleut ou il fait froid je ne sortirai pas”
(b) “le nombre 522 n’est pas divisible par 3 mais il est divisible par 7”
(c) “ce quadrilatère n’est ni un rectangle ni un losange”
(d) “si Paul ne va pas travailler ce matin il va perdre son emploi”

Exercice 4

Dans les formules suivantes sélectionner les tautologies et examiner les raisonnements logiques sous-jacents.

$$\neg\neg x \Leftrightarrow x, \quad x \Rightarrow x, \quad (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (y \Rightarrow x), \quad (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x),$$
$$(\neg x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y), \quad \neg x \Rightarrow (x \Rightarrow y), \quad \neg x \vee x, \quad \neg(\neg x \wedge x)$$
$$[x \Rightarrow (y \Rightarrow (z \Rightarrow t))] \Rightarrow [(y \Rightarrow x) \Rightarrow ((x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \Rightarrow t))]$$
$$(x \Rightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow ((x \wedge \neg y) \Rightarrow z), \quad (x \Rightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow ((x \wedge \neg y \wedge \neg z) \Rightarrow \mathcal{F})$$
$$(x \Rightarrow ((y \vee z)) \Leftrightarrow ((\neg y \wedge \neg z) \Rightarrow \neg x)$$

Exercice 5

Si $\mathcal{A}$ est un ensemble de formules du calcul des propositions et α, β deux formules du calcul des propositions, on rappelle que $\mathcal{A} \models \alpha$ signifie que tout modèle de l’ensemble de formules $\mathcal{A}$ est un modèle de α.

1. Montrer que $\mathcal{A} \models \alpha$ si et seulement si $\mathcal{A} \cup \{\neg\alpha\}$ est contradictoire.
2. Montrer que $\mathcal{A} \cup \{\alpha\} \models \beta$ si et seulement si $\mathcal{A} \models \alpha \Rightarrow \beta$

Exercice 6

Pour chacun des ensembles de formules $\mathcal{A}$ et des formules α suivants déterminer si $\mathcal{A} \models \alpha$.

1. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow a,\ a \vee b\}$, $\alpha = a \wedge b$
2. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b,\ a \vee b\}$, $\alpha = b \Rightarrow a$
3. $\mathcal{A} = \{a \Rightarrow b,\ a \vee b\}$, $\alpha = a \vee \neg a$
4. $\mathcal{A} = \{a \wedge \neg b,\ \neg a \wedge b\}$, $\alpha = a$