Cours esial 1a / mathématiques proba / fiche n°03
Chardon Marion

Retour

FICHE N°3 : Variables aléatoires continues

I) Définitions

va **réelle** : X : Ω -> $\mathbb{R}$
fonction de **répartition** : F_X : $\mathbb{R}$ -> [0;1] : $F_X(x) = P(X \leq x)$.

propriétés :
F_X croissante
$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F_X(x)=1}$ et $\boxed{\lim_{x \to -\infty} F_X(x)=0}$
F_X continue à droite avec des lim à gauche.

La loi de X est donnée par caractérisée par la famille $\{F_X(x), x \in \mathbb{R}\}$:
1) si F_X est constante par morceaux, X est une va discrète
2) si F_X est continue, X est une va **continue**
3) si $\boxed{F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).dt}$, X est **absolument continue**, et admet f pour densité
4) si X admet f pour densité, alors f caractérise la loi de X et quelque soit A $\subset \mathbb{R}$, $\boxed{P(X\in A)=\int_A f(t).dt}$.

propriétés :
f : $\mathbb{R}$ -> $\mathbb{R}$ positive et $\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(t).dt=1}$.

II) Lois usuelles

Loi uniforme X ~ U([a,b]) :
densité : $\boxed{f(x)=\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)}$
Utilisation : seule va disponible sur ordinateur
E[X] = (a+b)/2 et V(X) = (b-a)²/12

Loi exponentielle X ~ $\varepsilon(\lambda)$ $\lambda > 0$:
densité : $\boxed{f_X(x)=\lambda.e^{-\lambda.x}1_{\mathbb{R}^+}(x)}$
Utilisation : intervalle de temps entre l'arrivée de 2 clients dans une boutique ou 2

utilisateurs sur internet
$E[X]=1/\lambda$ et $V(X) = 1/\lambda^2$

Loi gaussienne $X \sim N(\mu,\sigma^2)$:

densité : $\boxed{f_X(x)=\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2.\sigma^2}}}{\sqrt{2.\pi.\sigma^2}}}$ (pas de primitive de cette chose...)

Utilisation : modélise des systèmes complexes dépendant de nombreux petit facteurs indépendants.
loi gaussienne standard : $X \sim N(0,1)$
dans ce cas : $E[X] = 0$ et $V(X) = 1$

III) Espérance et variance

Espérance E : (valeur moyenne de X)
soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\boxed{E[\varphi(X)]=\int_{\mathbb{R}} \varphi(x).f_X(x).dx}$ (si l'int converge)

$\boxed{E[X]=\int_{\mathbb{R}} x f_X(x).dx}$

$\boxed{E[\sum_{i=1}^{d} X_i]=\sum_{i=1}^{d} E[X_i]}$

si X et Y indépendants et $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E[\varphi(X).\psi(Y)]=E[\varphi(X)].E[\psi(Y)]$

Variance V :

$\boxed{V(X)=\int_{\mathbb{R}} (x-m)^2.f_X(x).dx}$ (avec $m=E[X]$)

$V(aX + b) = a^2.V(X)$

$\boxed{V(\sum_{i=1}^{d} X_i)=\sum_{i=1}^{d} V(X_i)}$ si X_i indépendants.

critère : soit X une va telle que pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ (fonctions continues et bornées), si

$\boxed{E[\varphi(X)]=\int_{\mathbb{R}} \varphi(x).f_X(x).dx}$

alors X est une va **absolument continue**, admettant f comme densité
(On se sert de ce critère pour les changements de variables. Attention aux bornes d'intégration. On trouve ainsi la densité)
si $X \sim N(0,1)$ et $Y = m+ \sigma X$, avec m réel, $\sigma \neq$ de zéro, alors $Y \sim N(m,\sigma^2)$
> si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, alors $E[Y]=\mu$ et $V(Y)=\sigma^2$.

IV) Vecteurs aléatoires

X vecteur aléatoire :

fonction de répartition de X est définie par $x=(x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$: $F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$

X **absolument continu** s'il existe f / $\boxed{F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y_1,\dots,y_d).dy_1\dots dy_d}$

soit f_X la densité de X, alors la va $\mathbf{X_i}$ **a pour densité** $\mathbf{f_{X_i}}$ définie par :

$$f_{X_i}(x_i)=\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(y_1,\dots,y_{i-1},x,y_{i+1},\dots,y_d).dy_1\dots dy_{i-1}dy_{i+1}\dots dy_d$$

les coordonnées $X_1,\dots,X_d$ de X sont **indépendantes** si $f_X(x_1,\dots,x_d)=\prod_{i=1}^{d} f_X(x_i)$.

V) Convergence de variables aléatoires (discrètes et continues)

$(X_1,\dots,X_n)$ est un **n-échantillon** si les va X_i sont iid (indép. et identiquement distribuées)

moyenne asymptotique des X_i (du n-échantillon) : $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

soit $(Y_1,\dots,Y_n)$ suite de va, Y_n **converge presque surement** vers une va Y si pour tout $\omega \in \Omega$ on a :

$\lim_{n\to\infty} Y_i(\omega)=Y(\omega)$.

loi des grands nombres : $\bar{X}_n\to m(quand\ n\to+\infty\ presque\ sûrement)$ (avec $m = E[X_1]$)

> ie : pour tout $\omega \in \Omega$, $\bar{X}_n(\omega)\to m(quand\ n\to+\infty)$.

vitesse de convergence : $E[X_1]=m$, $V(X_i)=\sigma^2$, alors $E[\bar{X}_n] = m$ et

$V(\bar{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n}\to 0(quand\ n\to\infty)$.

théorème du contrôle de la limite : $E[X_1]=m$, $V(X_i)=\sigma^2$, alors

$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-m)}{\sigma}\to Z(quand\ n\to\infty)$ avec $Z \sim N(0,1)$

> si on pose $Z_n=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-m)}{\sigma}$, alors pour tout x réel :

$P(Z_n \leq x) \to P(Z \leq x)$ (convergence simple d'une suite de fonction)

(pour calculer $P(\text{sum } X_i \leq a)$, on transforme pour trouver la forme précédente, et on retrombe sur une forme gaussienne standard).

Retour

CHARDON Marion
Webmestre